Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών

Θεωρία Μέτρου

Τελική Εξέταση 2017–18

(Φεβρουάριος 2018)

1. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda\big((a,b)\setminus E\big) \geqslant \frac{1}{2}(b-a)$ για κάθε ανοικτό διάστημα $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τότε $\lambda(E)=0$.

2. Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε $\limsup_{n\to\infty}\lambda(A_n)=1$. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$, υπάρχει υπακολουθία $(A_{n_k})_{k\in N}$ της $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k}\right)>\varepsilon$.

3. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f\colon X\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)<\delta$ ισχύει ότι $\int_A|f|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

4. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n,f\colon X\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $f_n\to f$ μ-σχεδόν παντού αν και μόνο αν $\mu\big(\limsup_n E_n(\varepsilon)\big)=0$ για κάθε $\varepsilon>0$, όπου

$$E_n(\varepsilon):=\{x\in X\colon\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}$$

και κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon>0$.

5. Έστω $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και $\varepsilon_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\varepsilon_n\to 0$. Δείξτε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{x\in\mathbb{R}\colon\ |f_n(x)|>\varepsilon_n\})<+\infty$, τότε $f_n(x)\to 0$ για λ-σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $A_n\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $\mu(A_n\triangle A_m)\to 0$ καθώς $n,m\to\infty$, τότε υπάρχει $A\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{1}_{A_n}\to\mathbf{1}_A$ κατά μέτρο.

7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n\colon X\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοιων ώστε $\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty$ για μ-σχεδόν κάθε $x\in X$. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $A\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(X\setminus A)<\varepsilon$ και

$$\sup_{x\in A}\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)|<+\infty.$$

8. Δείξτε ότι αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $f\colon X\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int_0^{\infty}\mu\big(\{x\in X\colon\ f(x)>t\}\big)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0}\mu\big(\{x\in X\colon\ f(x)<t\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

9. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$$

είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας πλήρως.

(β) Βρείτε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας πλήρως.

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για $f\colon X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, έστω

$$A_t := \{x \in X\colon f(x) > t\}\,,$$

για κάθε $t \in [0, +\infty)$, και έστω

$$\|f\|_\infty := \inf\{t \geqslant 0\colon \mu(A_t) = 0\}\,,$$

αν $\mu(A_t) = 0$ για κάποιο $t \geq 0$· αν $\mu(A_t) > 0$ για κάθε $t \geqslant 0$, τότε θέτουμε $\|f\|_\infty = +\infty$. Δείξτε ότι $f \leqslant \|f\|_\infty$ μ-σχεδόν παντού, για κάθε μετρήσιμη $f\colon X \to [0, +\infty]$.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και η συνολική αξία τους είναι 12 μονάδες.

Καλή επιτυχία!