Επιχειρησιακή Έρευνα 18/3/2020

Saturday, March 21, 2020 8:25 PM

Παράδειγμα

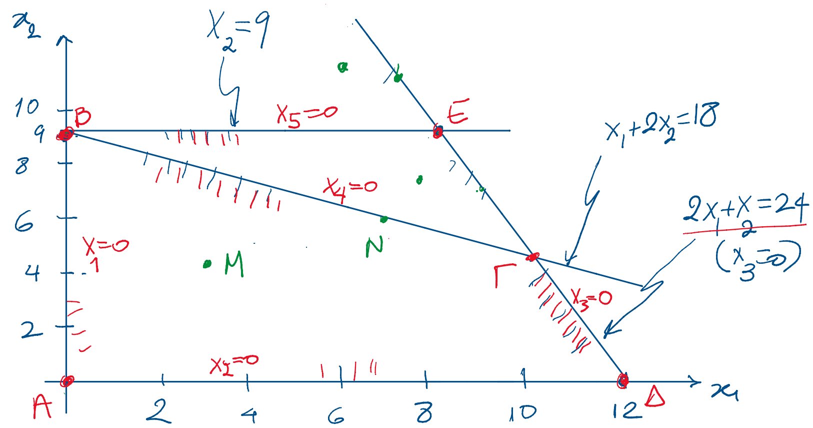
Έστω π.γ.π. με εφικτή περιοχή F

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (KM) \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 24 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 18 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\ x_1, \dots, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $r(A) = 3$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$M: \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix}$ 5 ($\neq 0$)

$N: \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ 0 \\ + \end{pmatrix}$ 4 ($\neq 0$)



$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 24 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 18 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \end{aligned} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

① $\underline{x_1 = x_2 = 0}$ $\qquad \begin{aligned} x_3 \qquad\quad &= 24 \\ x_4 \quad &= 18 \\ x_5 &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow A \qquad$ 3 θετ.
2 μηδ.

② $x_2 = x_3 = 0$ $\qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} + \\ 0 \\ 0 \\ + \\ + \end{pmatrix} \rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix} 3 & (\neq 0) \\ 2 & (=0) \end{matrix}$$

(3) $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} + \\ + \\ 0 \\ 0 \\ + \end{pmatrix} \rightarrow \Gamma$$

3 μη μηδ (θετικές)
2 μηδ.

(4) $x_3 = x_5 = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E$$

3 μη μηδ
2 μηδ

(5) $x_1 = x_4 = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \checkmark & \checkmark & \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = 9 \\ x_3 = 15 \\ x_5 = 0 \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ + \\ + \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B$$

2 μη μηδ (θετ)
3 μηδ.

(6) $x_1 = x_5 = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \checkmark & \checkmark & \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = 9 \\ x_3 = 15 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ + \\ + \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B$$

(7) $x_4 = x_5 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \checkmark 1 & \checkmark 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad x_1 = 0 \quad \boxed{\begin{matrix} x_2 = 9 \\ x_3 = 15 \end{matrix}}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ + \\ + \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B$$

(8) $x_2 = x_5 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det = 0} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητα Σε όλες τις κορυφές (εφικτές ή όχι) οι μη μηδενικές συντεταγμένες του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^5$ αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A

ΟΡΙΣΜΟΙ Έστω πγπ σε ΚΜ

$$\max c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ... $b \in \mathbb{R}^m$ (...)

$$x \geq 0$$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad r(A) = m < n, \quad b \in \mathbb{R}^m (\geq 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}$$

$$a_i' = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m$$ ιοστή γραμμή

$$A = \begin{pmatrix} P_1, & P_2, & \dots, & P_n \end{pmatrix} \qquad P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ j οστή στήλη $j = 1, \dots, n$

<u>$Ax = b$</u>

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

1) $$Ax = \begin{pmatrix} a_1'x \\ a_2'x \\ \vdots \\ a_m'x \end{pmatrix}$$

2) $$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

$$= P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n$$

$$Ax=b \iff P_1 x_1 + \cdots + P_n x_n = b$$

Λύση ΣΓΕ $\quad x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax=b$

Εφικτή λύση $\quad x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax=b \ , \ x \geq 0 \quad (x \in F)$

Βασική λύση $\quad x$: λύση $(Ax=b)$ τέτοια ώστε οι μη μηδενικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A.

Βασική εφικτή λύση $\quad x$: βασική και εφικτή

ισοδ. $\quad x \geq 0$ και όλες οι θετικές συντεταγμένες αντιστ. σε γραμμικά ανεξ. στήλες του A (αρνητικές δεν υπάρχουν)

Βασική εφικτή λύση : μη εκφυλισμένη ακριβώς m θετικές συντεταγμένες

εκφυλισμένη αν έχει λιγότερες από m θετικές συντεταγμένες

Θεώρημα 1 $\quad$ Αν x είναι βασική εφικτή λύση τότε είναι κορυφή του F

Θεώρημα 2 $\quad$ Αν x είναι κορυφή του F, τότε είναι βασική εφικτή λύση

βασική εφικτή . . .

Παραδ.3

$$\max \; 3x_1+5x_2-2x_3+x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1,\dots,x_4 \ge 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) $P_1 \; P_2 \; : \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(θέτω $x_3 = x_4 = 0$)

$$Ax = b \Rightarrow B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{array}$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

Επομένως η λύση $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ βασική αλλά όχι εφικτή (δεν είναι κορυφή)

ii) $P_1, P_3 : \quad P_1 = P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ γρ. εξαρτημένες ✗

$$\Downarrow$$

$$x_2 = x_4 = 0$$

iii) P_1, P_4 $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$(x_2 = x_3 = 0)$

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_4 = 9/2 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$B \in \Lambda \Longrightarrow$ κορυφή F

(μη εκφυλισμένη)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad \exists$ $\binom{n}{m}$ τετραγωνικοί υποπίνακες του A

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Βασική εφικτή λύση που αντιστοιχεί σε m στήλες του A γρ. ανεξάρτητες

$B = (P_i, P_j, \ldots, P_l)$ $\quad m \times m$ πίνακας

$B = (P_i, P_j, \dots, P_\ell)$ $\quad m \times m$ πίνακας

$|B| \neq 0 \Rightarrow$ οι στήλες του αντιστοιχούν σε <u>βάση</u> του R^m

B : βασικός πίνακας

βασική λύση (εφικτή)

$$X = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} + \\ + \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ + \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} i \text{ — βασική μεταβλητή} \\ j \text{ —} \\ \\ \\ k \text{ — βασικές} \\ \ell \text{ —} \\ \\ \end{array}$$

μη βασικές