Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-04-01

Wednesday, April 1, 2020 1:06 PM

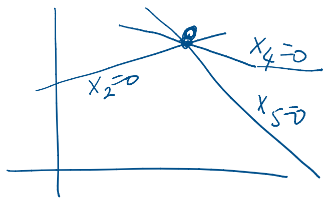
Εκφυλισμένη ΒΕΛ

(μια τουλάχιστον βασική μεταβλητή $=0$).

$n=5,\ m=3$

B	x_B		y_j		y_5	θ
P_1	5		1			$5/1$
P_4	~~0~~ ε (μικρό)		2			$0/2$ →
P_3	2		5			$2/5$

$$X=\begin{pmatrix}5\\0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\}X_B \text{ (εκφυλισμένη λύση)}\\ X_N\end{matrix}$$



Δεν εμφανίζεται ο I στις στήλες του A

(αν εμφανίζεται ο μοναδιαίος $A=(\underbrace{I}_{B}\ \ N)$, $B^{-1}=I$

$Ax=b \Rightarrow$

$\Rightarrow x_B + N x_N = b$

κ' επειδή $x_N=0 \Rightarrow \underline{x_B=b\geq 0}$

Επομένως η λύση $x=\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$ είναι ΒΕΛ.

Άρα $F\neq\emptyset$ $\left(x=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\in F\right)$

Μέθοδος μεγάλου M

M $(M\to-\infty)$

$$\begin{aligned}\max\ & c_1x_1+\dots+c_nx_n + My_1 + My_2 + \dots + My_m\\ & a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n + y_1 = b_1\\ & \vdots \qquad\qquad\qquad + y_2 = b_2\\ & a_{m1}+\dots+a_{mn}x_n \ \dots\ + y_m = b_m\\ & x_1,\dots,x_n\geq 0\end{aligned}$$

$y_1, y_2, \dots, y_m$: $\boxed{\text{τεχνητές μεταβλητές}}$

π.χ. $3x_1+2x_2=5$ ~~⇔~~ $3x_1+2x_2+y=5$

κλπ. $3x_1+2x_2\leq 5 \Leftrightarrow 3x_1+2x_2+x_3=5$, $x_3\geq 0$

(x.)

$x_3 \ge 0$

Στο αρχικό πρ. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Στο νέο πρ. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Αν το αρχικό πρόβλημα είναι εφικτό ($F \neq \emptyset$) τότε στη βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος ("λάθος" νέου) (με τα $y_1, \dots, y_m$) όλα τα y_i θα είναι μη βασικά (δηλαδή $y_i = 0$) κ' επομένως το διάνυσμα x θα είναι βέλτιστη λύση και στο αρχικό πρόβλημα.

Αν στη βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος παραμένουν κάποιο ή κάποια y_i θετικά (δηλ. στη βάση) τότε το αρχικό πρόβλημα είναι ανέφικτο ($F = \emptyset$).

Παρατήρηση: Αν στον A εμφανίζονται κάποιες (αλλά όχι όλες) στήλες του I, τότε προσθέτουμε τεχνητές μεταβλητές που αντιστοιχούν μόνο στα μοναδιαία διανύσματα που λείπουν από τον A.

Παράδειγμα

$$\max \; 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + My_1 + My_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 + y_1 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 + y_2 &= 3 \\ x_1, \dots, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$m = 3, \; n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Νέο Πρόβλημα ($m = 3, \; n = 6$)

2   -3   1   2   M   M

			2	-3	1	2	M	M	
B	C_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	θ
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	8/1
P_5	M	6	0	1	1	1	1	0	6/1
P_6	M	3	0	0	2	-3	0	1	3/2 ✓
		$z_0=16+9M$	0	7+M	1+3M	2-2M	0	0	
				<0	<0	>0			

(M→-∞)

μπαίνει

όχι βέλτιστη

αν μια τεχνητή μεταβλητή βγει από τη βάση σε μια επανάληψη μπορεί να παραλειφθεί στα επόμενα βήματα

	B	C_B	X_B		~~Y_6~~
x_1	P_1	2			
y_1	P_5	M			
x_3	P_3	1			

Στο νέο πρόβλημα ο A

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

αρχ τεχνητές

P_1 P_5 P_6

B