Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-04-06

Monday, April 6, 2020 1:08 PM

Ασκήσεις μεθόδου Simplex

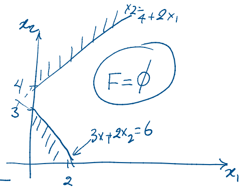
Άσκηση 1

$\max \; 12x_1 - 10x_2$

υ.π. $-2x_1 + x_2 \geq 4$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



Κανονική Μορφή

$\max \; 12x_1 - 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5$

$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

x_5: τεχνητή μεταβλητή $(M \to -\infty)$

B	C_B	$x_B = B^{-1}b$	P_1 (12)	P_2 (−10)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (M)	θ
P5	M	4	−2	1	−1	0	1	4/1 = 4
P4 → P2	0	6	3	2	0	1	0	6/2 = 3*
		4M	−2M−12	M+10	−M	0	0	
			>0	<0	>0			

$6/2 = 3^* \to$ φεύγει

Γ_1

$\Gamma_2 \to$ οδηγός

↑ μπαίνει (P_2)

			12	−10	0	0	M
P5	M	1	−7/2	0	−1	−1/2	1
P2	−10	3	3/2	1	0	1/2	0
		M−30	−7/2M−27	0	−M	−1/2M−5	0
			>0		>0	>0	

$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2 = \Gamma_1 - \Gamma_2'$

$\Gamma_2' = \frac{1}{2}\Gamma_2$

βέλτιστη λύση (?)

Επειδή στη βέλτιστη λύση παραμένει η τεχνητή μεταβλητή $x_5 \Rightarrow$ το αρχικό πρόβλημα είναι ανέφικτο $(F = \phi)$

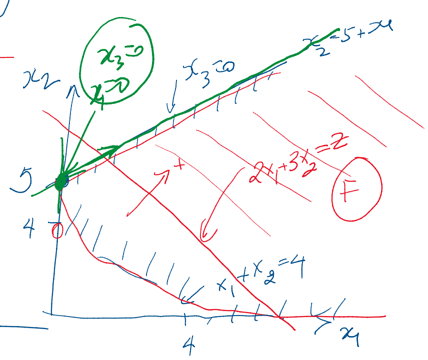
Άσκηση 2

$\max \; 2x_1 + 3x_2$

$-x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



Κανονική Μορφή

$\max \; 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

B	C_B	$B^{-1}b$	P_1 (2)	P_2 (3)	0	0	M → φεύγει	θ
P_3	0	5	−1	1	1	0	0	5/1 = 5
P5 → P_2	M	4	1	1	0	−1	1	4/1 = 4
		4M	M−2	M−3	0	−M	~~0~~	
			<0	<0		>0		

$x_3 = 5$

$x_5 = 4$

$4/1 = 4 \to$ φεύγει

Γ_1

Γ_2

↑ μπαίνει

P_4

$<0 \quad <0 \qquad\qquad >0$

$\uparrow$ μπαίνει

B	C_B	$B^{-1}b$	2	3	0	0 (P_4)	M
φεύγει P_3	0	1	-2	0	1	$\boxed{1}$	
P2	3	4	1	1	0	$\boxed{-1}$	
		12	1	0	0	-3	

$P_4 \nearrow$

$1/1=1 \rightarrow \quad \Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2$

$\times \quad \Gamma_2' = \Gamma_2$

$\uparrow$ μπαίνει

B	C_B	$B^{-1}b$	P1: 2	P2: 3	P3: 0	P4: 0
P4	0	1	$\boxed{-2}$	0	1	1
P2	3	5	$\boxed{-1}$	1	1	0
		15	-5 <0	0	3	0

$x_4 = 1$

$x_2 = 5$

$x_1 = 0$

$x_3 = 0$

$\Gamma_1'' = \Gamma_1'$

$\Gamma_2'' = \Gamma_2' + \Gamma_1'$

$\uparrow$ μπαίνει $\rightarrow \leq 0$

Πρόβλημα μη φραγμένο

$$\sup\{c'x : Ax=b, x\geq 0\} = +\infty$$

Άσκηση 3

$$\max \; 9x_1 + 3x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 \leq 18$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

Κανονική Μορφή

$$\max \; 9x_1 + 3x_2$$
$$-x_1 + x_2 + \overbrace{x_3}^{B} \qquad = 4$$
$$3x_1 + x_2 + \qquad x_4 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

B	C_B	$B^{-1}b$	9	3	0	0	θ	
P3	0	4	$\boxed{-1}$	1	1	0	×	Γ_1
P4	0	18	$\boxed{3}$	1	0	1	$18/3=6$ $\xrightarrow{\text{φεύγει}}$	Γ_2
		0	-9	-3	0	0		

$\leftarrow$ $P_1 \nearrow$

$\uparrow$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

μπαίνει η P1

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}x_N \\ \\ \}x_B \end{matrix}$$

			9	3	0	0	
P3	0	10	0	4/3	1	1/3	$10/(4/3) = 7{,}5$
P1	9	6	1	1/3	0	1/3	$6/(1/3) = 18$
		54	0 ✓	0	0 ✓	3	

$x_1 = 6$

$x_2 = 0$

P2

$\Gamma_1' = \Gamma_1 + 1/3\, \Gamma_2 = \Gamma_1$

$\Gamma_2' = \frac{1}{3} \Gamma_2$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

μπαίνει η P2

μη βασικές στήλες

βέλτιστη λύση ($z_j - c_j \geq 0$

$$x^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z^* = 54$$

Αν στη βέλτιστη λύση

$z_j - c_j > 0$ για όλες τις μη βασικές στήλες

$\Longrightarrow$ μοναδική βέλτιστη λύση

Αν $z_j - c_j = 0$ για κάποια μη βασική στήλη

$\Longrightarrow$ $\exists$ πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

B	c_B	$B^{-1}b$	9	3	0	0
P2	3	15/2	0	1	3/4	1/4
P1	9	7/2	1	0	−1/4	1/4

P3

$\Gamma_1'' = 3$

$\Gamma_2'' =$

$+T_2'$

$\forall j)$

$\frac{3}{4}\, T_1'$

$T_2' - \frac{1}{4}\, T_1'$

P3

P1	9	7/2	1	0	-1/4	1/4
		54	0	0	0	3/4

$\Gamma_2'' =$

βέλτιστη

μη βασική $z_j - c_j = 0$

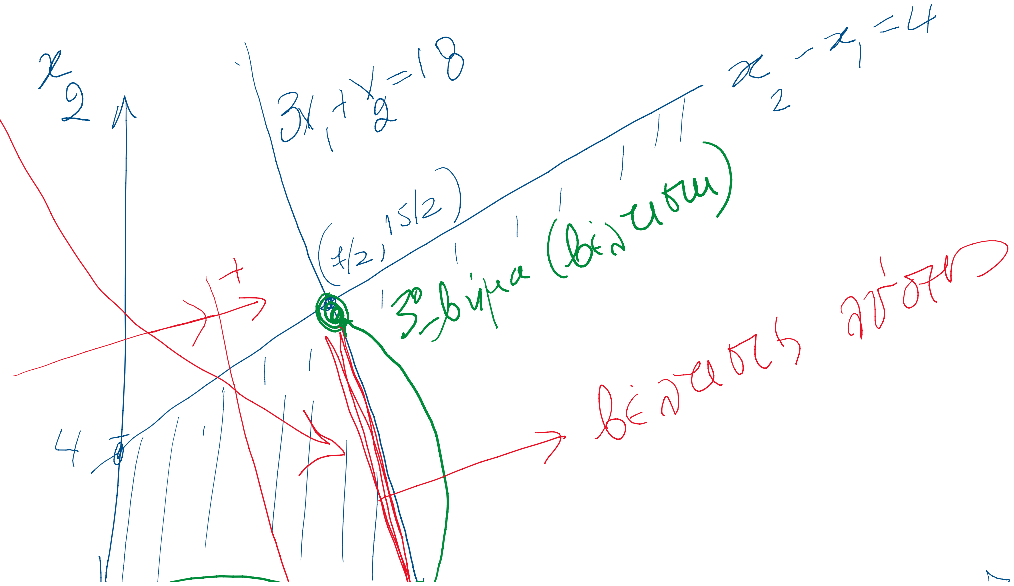
$$x_2^* = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 15/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← οι μόνες 2 βέλτιστες ΒΕΛ

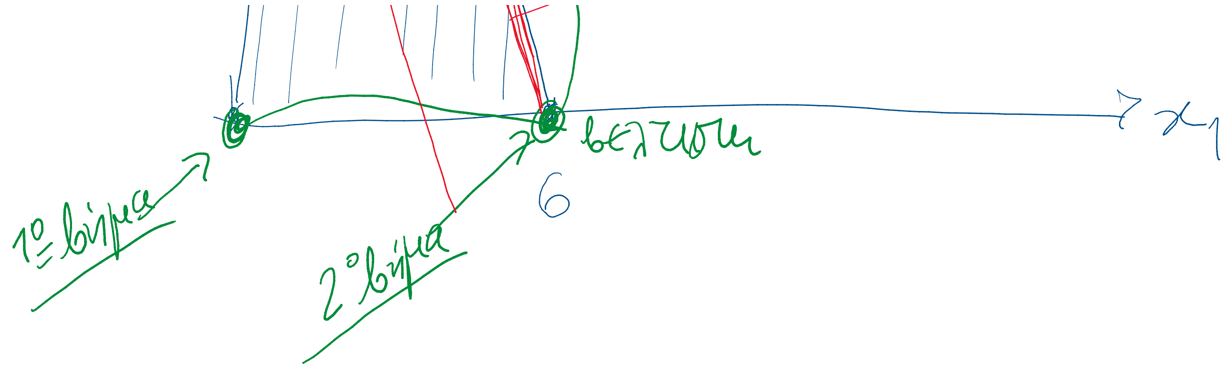
Βέλτιστη λύσεις

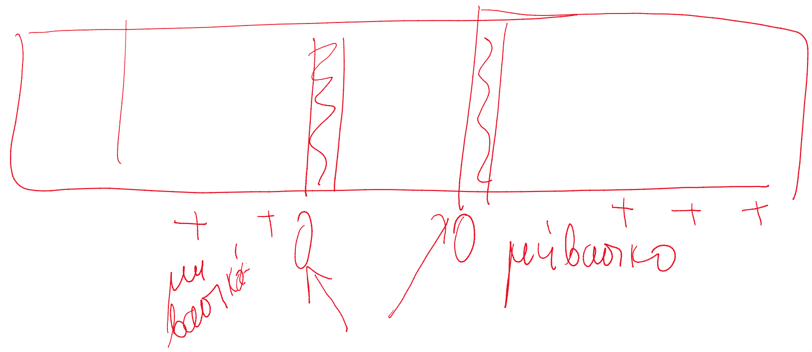
$$x^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \qquad \lambda \in [0,1]$$

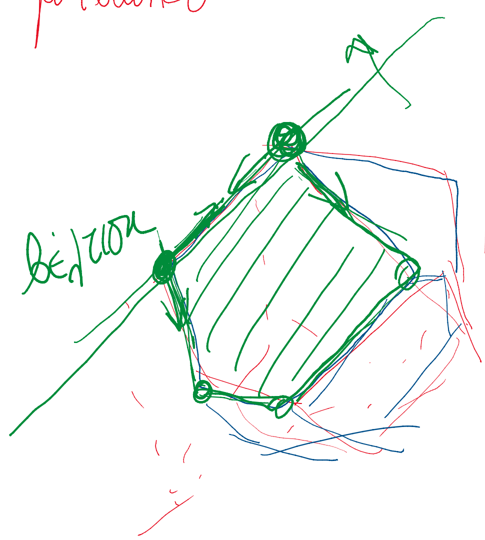
$$\boxed{x^* = \begin{pmatrix} 6\lambda + \frac{7}{2}(1-\lambda) \\ 15/2\,(1-\lambda) \\ 10\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \lambda \leq 1}$$



$$\Gamma_2' - \frac{1}{4}\Gamma_1'$$







Αρχικό πρόβλημα

$$\max c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$z^* = z_0$ (πολλαπλές βέλτιστες λύσεις)

$Ax=b$

Σύνολο βέλτιστων λύσεων : $\left\{ x : \begin{array}{l} Ax = b \\ c'x = z \\ x \geq 0 \end{array} \right.$

$= F \cap \{ x : c' \ldots$

Βέλτιστη ΒΕΛ = ακραία σημεία

$z_0 \}$

$x = z_0 \}$