Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-04-13

Monday, April 13, 2020 1:19 PM

Άμεσος Σχηματισμός του Δυικού Προβλήματος

Παράδειγμα

(Π)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

ΗΚ μορφή $(x_3' = -x_3 \ge 0)$, $(x_4 = x_4' - x_4'')$

(Π)

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 3x_2 - 2x_3' + x_4' - x_4'' & \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3' + 2x_4' - 2x_4'' \le 6 & w_1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 5x_3' + x_4' - x_4'' \le 4 & w_2 \\ & -2x_1 - 2x_2 + 5x_3' - x_4' + x_4'' \le -4 & w_3 \\ & x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'' \ge 0 & \end{array}$$

$\Downarrow$ Δυικό

(Δ)

$$\begin{array}{ll} \min & 6w_1 + 4w_2 - 4w_3 \\ & 4w_1 + 2w_2 - 2w_3 \ge 5 \\ & 3w_1 + 2w_2 - 2w_3 \ge 3 \\ \times(-1) & [-w_1 - 5w_2 + 5w_3 \ge -2] \\ & 2w_1 + w_2 - w_3 \ge 1 \\ & -2w_1 - w_2 + w_3 \ge -1 \\ & w_1,\ w_2,\ w_3 \ge 0 \end{array}$$

(σε ΗΚ μορφή min)

$2w_1 + w_2 - w_3 = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2w_1 + w_2 - w_3 \ge 1 \\ -2w_1 - w_2 + w_3 \ge -1 \end{cases}$

Μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο πρόβλημα

(Δ)

$$\begin{array}{ll} \min & 6w_1 + \underbrace{4w_2 - 4w_3}_{4(w_2 - w_3),\ w_2' \in \mathbb{R}} \\ & 4w_1 + \underbrace{2w_2 - 2w_3}_{2(w_2 - w_3)} \ge 5 \\ & 3w_1 + 2w_2 - 2w_3 \ge 3 \\ & w_1 + 5w_2 - 5w_3 \le 2 \\ & 2w_1 + w_2 - w_3 = 1 \end{array}$$

Μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο πρόβλημα

(Δ)

$$\begin{array}{ll} \min & 6w_1 + 4w_2' \\ & 4w_1 + 2w_2' \ge 5 \\ & 3w_1 + 2w_2' \ge 3 \\ & w_1 + 5w_2' \le 2 \\ & 2w_1 + w_2' = 1 \\ & w_1 \ge 0,\ w_2' \in \mathbb{R} \end{array}$$

(Π)

$$\begin{array}{ll} & \max\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ (w_1) & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ \in \mathbb{R}\ (w_2) & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \ \boxed{= 4} \text{ ισότητα} \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array}$$

(Δ)

$$\begin{array}{ll} \min & 6w_1 + 4w_2 \\ & 4w_1 + 2w_2 \ge 5 \quad (x_1) \\ & 3w_1 + 2w_2 \ge 3 \quad (x_2) \\ & w_1 + 5w_2 \le 2 \quad (x_3) \le 0 \\ & 2w_1 + w_2 = 1 \quad (x_4) \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{ισότητα} \\ & w_1 \ge 0,\ \boxed{w_2 \in \mathbb{R}} \end{array}$$

αντιθέτως από πριν

Κανόνες για απευθείας σχηματισμό του δυικού

1. Μεταβλ. Π $\longleftrightarrow$ περιορ. Δ

   Περιορ. Π $\longleftrightarrow$ μεταβλ. Δ

   $A \longleftrightarrow A'$

Αντικ συν	$\longleftrightarrow$	Δεξιό μέρος περ.
Δεξιό μερ.	$\longleftrightarrow$	Αντικ. συναρ.
Μεταβ. ≥ 0	$\longleftrightarrow$	Περιορισμός προβ. φορά
Μεταβ ≤ 0	$\longleftrightarrow$	Περιορισμός αντίθετη φορά από προβλ.
Μεταβ $\in \mathbb{R}$	$\longleftrightarrow$	Περιορισμός ισότητα

Προβλεπόμενη φορά $= \begin{cases} \leq & \text{για max} \\ \geq & \text{" min} \end{cases}$

Άσκηση

$$
\begin{array}{ll}
\min & 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 12x_4 \\
& x_1 - 7x_2 + x_3 \leq 9 \\
& x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 5 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 15 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Να σχηματίστε το δυϊκό πρόβλημα.

(Π) ($\geq$)

$$
\begin{array}{lll}
& \min & 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 12x_4 \\
w_1 \leq 0 & & x_1 - 7x_2 + x_3 \overset{\text{αντιθ}}{\leq} 9 \\
w_2 \geq 0 & & x_2 - 2x_3 + x_4 \overset{\text{προβλ}}{\geq} 5 \\
w_3 \in \mathbb{R} & & 3x_1 + 2x_2 - x_4 \overset{\text{ισότ}}{=} 15 \\
& & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \leq 0 \quad x_4 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

(Δ) ($\leq$)

$$
\begin{array}{lll}
\max & 9w_1 + 5w_2 + 15w_3 & \\
& w_1 + 3w_3 \leq 5 & (x_1) \geq 0 \\
& -7w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 7 & (x_2) \leq 0 \\
& w_1 - 2w_2 \geq -6 & (x_3) \leq 0 \\
& w_2 - w_3 = 12 & (x_4) \in \mathbb{R} \\
& w_1 \leq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Ιδιότητες Δυικού – Σχέση με το πρωτεύον

Έστω F_Π εφικτή περιοχή του Π $\leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \max c'x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$

F_Δ " " του Δ $\leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \min b'w \\ A'w \geq c \\ w \geq 0 \end{array} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} \qquad a_i' = i\text{-γραμμή του } A$$

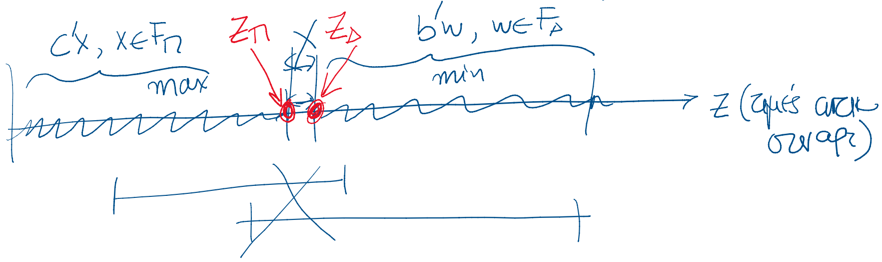
$$= \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix} \qquad P_j : j\text{-στήλη του } A.$$

$$Ax \leq b \iff \boxed{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ a_i' x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}}\ F_\Pi \quad (\text{περ. } \Pi)$$

$$A'w \geq c \iff w'A \geq c' \iff \boxed{\begin{array}{l} w'P_j \geq c_j, \ j = 1, \dots, n \\ w \geq 0 \end{array}}\ (\text{περ. } \Delta)\ F_\Delta$$

$A'w \geq c \iff w'A \geq c' \iff \boxed{\begin{matrix} w'P_j \geq c_j, \; j=1,\dots,n \\ w \geq 0 \end{matrix}}$ (περ. Δ) F_Δ

Θεώρημα 1 Αν $x \in F_\Pi$ (max) και $w \in F_\Delta$ (min) $\Rightarrow$ $\boxed{c'x \leq b'w}$



Τι γίνεται αν Π μη φραγ. δηλ. $z_\Pi = \infty$?

Πόρισμα 1 Ασθενές Θεώρημα Δυικότητας

Αν το Π κ' το Δ έχουν βέλτιστη λύση κ' οι βέλτιστες τιμές είναι z_Π, z_Δ αντίστοιχα, τότε $\boxed{z_\Pi \leq z_\Delta}$

Πόρισμα 2 Αν $x \in F_\Pi$, $w \in F_\Delta$ τ.ω. $c'x = b'w$ $\Rightarrow$ x βέλτιστη στο F_Π, w βέλτιστη στο F_Δ

δηλαδή $z_\Pi = z_\Delta$

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Έστω $x \in F_\Pi \Rightarrow$ $Ax \leq b$ ✓, $x \geq 0$

$w \in F_\Delta \Rightarrow$ $w'A \geq c'$, $w' \geq 0$ ✓

$$\left.\begin{matrix} Ax \leq b \\ w' \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{w'Ax \leq w'b} \quad (1)$$

(αποδείξτε το)

$$Ax \le b \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} a_1'x \le b_1 & w_1 \ge 0 \\ a_2'x \le b_2 & w_2 \ge 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_m'x \le b_m & w_m \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i (a_i'x)}_{} \le \sum_{i=1}^{m} w_i b_i \iff \boxed{w'Ax \le w'b}$$

$$\left.\begin{array}{l} w'A \ge c' \\ x \ge 0 \end{array}\right\} \underbrace{w'Ax}_{} \ge c'x \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{c'x \le w'Ax \le b'w}$$

Θεώρημα 2 (Ισχυρό Θεώρημα Δυϊκότητας)

1) Αν Π έχει βέλτιστη λύση τότε έχει και το Δ και οι βέλτιστες τιμές ταυτίζονται $(z_\Pi = z_\Delta)$ (και αντίστροφα)

2) Αν Π είναι μη φραγμένο $\Rightarrow$ Δ είναι ανέφικτο $(F_\Delta = \emptyset)$

Αν Δ " " " $\Rightarrow$ Π " " $(F_\Pi = \emptyset)$

Απόδειξη

(2) Έστω Π μη φραγμένο

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists \; x \in F_\Pi : \; c'x > z$$

Υποθ. $F_\Delta \neq \emptyset$ κ' θεωρούμε $w \in F_\Delta$

Τότε $b'w < \infty$

Τότε $b'w < \infty$

Όμως τότε $\exists\ x \in F_\Pi : c'x > b'w$

άτοπο από Θεώρημα 1 $\Longrightarrow F_\Delta = \emptyset$

Αν Δ μη φραγμένο $\Longrightarrow z_\Delta = -\infty$ ✓

Π \ Δ	ΒΛ	ΜΦ	ΑΝΕΦ.
ΒΛ	✓	✗	✗
ΜΦ	✗	✗	✓
ΑΝΕΦ	✗	✓	✓

δεν προβλέπεται από τα θεωρήματα αλλά υπάρχουν παραδείγματα