Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-04-15

Wednesday, April 15, 2020 1:10 PM

(Π) $\max c'x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$ (Δ) $\min b'w$, $w'A \ge c'$, $w \ge 0$ $(A'w \ge c)$

Θεώρημα (Ισχυρό Θ. Δυικότητας)

1) Αν το ένα από τα Π, Δ έχει βέλτιστη λύση, τότε έχει και το άλλο, και οι βέλτιστες τιμές των Π, Δ είναι ίσες $(z_\Pi = z_\Delta)$

2) Αν Π είναι μη φραγμένο τότε το Δ είναι αδύνατο
Αν Δ " " " " " Π " " .

Απόδειξη

(1) Το Π γράφεται ως

$$\begin{aligned} &\max c'x + 0'y \\ (w)\quad & Ax + y = b \\ & x, y \ge 0 \end{aligned} \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \tilde{A} = (A \ \ I)$$

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} A' \\ I \end{pmatrix} \Longrightarrow (\Delta) \quad \begin{aligned} &\min b'w \\ & A'w \ge c \\ & w \ge 0 \\ & w \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Έστω Π έχει βέλτιστη λύση $\hat{x}$, με βασικό πίνακα $B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m})$ ($m\times m$ υποπίνακας του $\tilde{A}$)

$$x_B = B^{-1}b \qquad \left(Ax = b,\ \left.\begin{aligned} Bx_B + Nx_N = b \\ x_N = 0 \end{aligned}\right\} x_B = B^{-1}b\right)$$

$$c_B' = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})$$

$$z_\Pi = c_B' \cdot x_B \underset{(+c_N'x_N)}{} = c_B' B^{-1} b = c' \cdot \hat{x}$$

$$c_N'x_N = 0$$

αρχικό tableau

	c_B	x_B		
P_{n+1}	0			
$\vdots$		b	A	I
P_{n+m}	0			
			$-c'$	0

$[A \ \ I] \to \tilde{A}$

$z_j - c_j$, $z_j = 0$

(αρχική βασική λύση δεν είναι απαραίτητα εφικτή)

τελικό βέλτιστο tableau

	c_B		$[\ c'\ ]$	$[\ 0'\ ]$
P_{i_1}	c_{i_1}			
P_{i_2}	$\vdots$	$B^{-1}b$ (≥ 0)	$B^{-1}A$	B^{-1}
$\vdots$				
P_{i_m}	c_{i_m}			
		$c_B'B^{-1}b$	$\underbrace{\boxed{c_B'B^{-1}}A - c'}_{\ge 0}$	$\underbrace{\boxed{c_B'B^{-1} = w'}}_{z_j \ge 0}$

$\longrightarrow Y = B^{-1}\tilde{A}$

$\to \overset{w_j}{z_j} - c_j \Rightarrow w_j = (z_j - c_j) + c_j$

(επειδή ο B είναι βέλτιστος στο Π)

Έστω $\hat{w}' = c_B'B^{-1} \in \mathbb{R}^m$

$=0$ ... στο Π

Έστω $\hat{w}' = c_B' B^{-1} \ (\in \mathbb{R}^m)$

Για το $\hat{w}'$ έχουμε $\left.\begin{array}{l} \hat{w}'A - c' \geq 0 \\ \hat{w}' \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{w}'A \geq c' \\ \hat{w}' \geq 0 \end{array}} \Rightarrow \hat{w} \in F_\Delta$

Η τιμή της αντικ. συν. για $w = \hat{w}$ είναι

$$\hat{w}' b = c_B' \cdot B^{-1} \cdot b = c' \cdot \hat{x}$$

$\Rightarrow$ [Πόρισμα 1 : αν $\hat{x} \in F_\Pi$, $\hat{w} \in F_\Delta$ κ' $c'\hat{x} = b'\hat{w} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ($\hat{x}$ βέλτιστη F_Π, $\hat{w}$ βέλτιστη F_Δ)]

$$\Rightarrow \boxed{\hat{w}' = c_B' B^{-1} \text{ είναι η βέλτιστη λύση του } \Delta}$$

$w_i = \left(c_B' B^{-1}\right)_i = z_i$ που αντιστοιχεί στην i στήλη του μον. πίνακα στο αρχικό tableau.

Παράδειγμα

(Π) : max $5x_1 + 3x_2 + 2x_3$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$ $(+x_4 = 18)$
$x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 24$ $(+x_5 = 24)$
$x \geq 0$

(Δ) min $18w_1 + 24w_2$
$2w_1 + w_2 \geq 5$
$w_1 + w_2 \geq 3$
$w_1 + 4w_2 \geq 2$

$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_\Delta$

$w'b = 54 = c'x$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ βέλτιστη του (Δ)

Αρχικό tableau

I στις 4,5

B			5	3	2	0	0
P_4	0	18	2	1	1	1	0
P_5	0	24	1	1	4	0	1
		0	-5	-3	-2	0	0

αν ∃ βέλτιστη λύση τότε στο τελικό tableau τα w_1 w_2 θα εμφ. στις στήλες (4,5)

Τελικό

		x_B	5	3	2	0	0
P	3	18	2	1	1	1	0

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Τελικό tableau

		x_B	5	5	2	0	0
P_2	3	18	2	1	1	1	0
P_5	0	6	-1	0	3	-1	1
		54	1	0	1	3	0

$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$w' - c'$

$B = (P_2\ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$w_1 - 0 = 3 \Rightarrow w_1 = 3$

$w_2 - 0 = 0 \Rightarrow w_2 = 0$

βέλτιστη λύση του Δ.

$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Συμπληρωματικότητα (Complementarity)

Θεώρημα αν $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$ και $\hat{w} = \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_m \end{pmatrix}$

είναι βέλτιστες λύσεις των $\underbrace{\Pi, \Delta}_{\text{(σε ΗΚ-μορφή)}}$ αντίστοιχα

τότε $\hat{x}_j \overbrace{(\hat{w}' P_j - c_j)} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\hat{w}_i (\underbrace{b_i - \hat{a}_i x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Παρατηρήσεις

(Π): $Ax \le b \Rightarrow a_i' x \le b_i,\ i = 1, \dots, m \Longrightarrow \underbrace{b_i - a_i' x}_{\text{(περιθώριο) slack του περ. } i} \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

(Δ) $A'w \geq c \Rightarrow w'A \geq c' \Rightarrow w'P_j \geq c_j \quad , j=1,\dots,n$

$$w'A = w'[P_1, \dots, P_n] = (w'P_1 \; w'P_2 \; \dots \; w'P_n) \geq (c_1 \dots c_n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{w'P_j - c_j}_{\text{περιθ του περ } j \text{ του } Δ} \geq 0 \quad j=1,\dots,n$$

(Π)

$$\max \; c'x$$

$$b_1 - a_1'x \geq 0 \quad (w_1)$$

$$b_2 - a_2'x \geq 0 \quad (w_2)$$

$$\vdots$$

$$b_m - a_m'x \geq 0 \quad (w_m)$$

$$x \geq 0$$

(Δ)

$$\min \; b'w$$

$$w'P_1 - c_1 \geq 0 \quad (x_1)$$

$$w'P_2 - c_2 \geq 0 \quad (x_2)$$

$$\vdots$$

$$w'P_n - c_n \geq 0 \quad (x_n)$$

$$w \geq 0$$

Επομένως (το Θ. Συμπληρωματικότητας συνεπάγεται ότι)

Έστω ότι γνωρίζω τη β.λ. του Π $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Αν για κάποιο j $\hat{x}_j > 0 \Rightarrow w'P_j - c_j = 0 \Rightarrow \boxed{w'P_j = c_j}$

Αν για κάποιο i $a_i'x < b_i \Rightarrow b_i - a_i'x > 0 \Rightarrow \boxed{w_i = 0}$

(δηλ. ο i ικανοπ. με αυστηρή ανισότητα)

σύστημα εξισώσεων για τα w

Αν η $\hat{x}$ είναι μη εκφυλισμένη ΒΕΛ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

αν η x είναι μη εκφυλισμένη ΒΣΛ τότε το σύστημα
έχει μοναδική λύση

Απόδειξη Θ. Συμπληρωματικότητας

$\hat{x}$ βέλτιστη λύση του Π $\Rightarrow$ $A\hat{x} \le b$ ✓, $\hat{x} \ge 0$ ←

$\hat{w}$ " " του Δ $\Rightarrow$ $\hat{w}'A \ge c'$ ←, $\hat{w} \ge 0$ ✓

$$\left.\begin{aligned} \hat{w}'A\hat{x} &\le \hat{w}'b \\ \hat{w}'A\hat{x} &\ge c'\hat{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{c'\hat{x} \le \hat{w}'A\hat{x} \le \hat{w}'\hat{b}}$$

Όμως $\hat{x}, \hat{w}$ βέλτιστες $\Rightarrow$ $c'\hat{x} = \hat{w}'b$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{c}x = \hat{w}'A\hat{x}} = \hat{w}'\hat{b}$$

$$\hat{c}\hat{x} = \hat{w}'A\hat{x} \Rightarrow \hat{w}'A\hat{x} - c'\hat{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(\hat{w}'A - c')}\,\hat{x} = 0 \Rightarrow [\hat{w}'P_1 - c_1 \cdots \hat{w}'P_n - c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\hat{w}'P_j - c_j)}_{\ge 0} \underbrace{\hat{x}_j}_{\ge 0} = 0 \quad \forall j \Rightarrow \boxed{(\hat{w}P_j - c_j)\,x_j = 0 \quad \forall j}$$

Όμοια κ' οι άλλες ανισότητες.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

(Π) $\max \; 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 18 \quad (w_1)$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \le 24 \quad (w_2) \leftarrow \text{ανισότητα}$$
$$x \ge 0$$

(Δ) $\min \; 18w_1 + 24w_2$

$$2w_1 + 3w_2 \ge 5 \quad (x_1)$$
$$w_1 + w_2 \ge 3 \quad (x_2) \leftarrow >0$$
$$w_1 + 4w_2 \ge 2 \quad (x_3)$$
$$w \ge 0$$

Βρήκαμε ότι η βέλτιστη λύση του Π είναι

$$\hat{x} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \to x_2 \\ \\ \\ \to x_5 \end{array}$$

Για το $\hat{x}$ οι περ. του Π.

$$2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 18$$
$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 4\hat{x}_3 = 18 < 24 \quad (\text{ανισότητα})$$

$$\hat{w}_2(24-18) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \hat{w}_2 = 0 \\ \hat{w}_1 + \hat{w}_2 = 3 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \hat{w}_2 = 0 \\ \hat{w}_1 = 3 \end{matrix}}$$
$$\underbrace{\hat{x}_2}_{>0}(\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - 3) = 0 \Rightarrow$$

όπως έχουμε ήδη βρεί από το βέλτιστο <u>tableau</u>