Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-05-04

Monday, May 4, 2020 12:55 PM

Παράδειγμα 1 (Φόρτωση οχήματος)

5 κιβώτια

Κιβ	1	2	3	4	5	
Βάρος	2	4	3	1	5	(B_t)
Αξία	3	7	5	3	7	(A_t)

Εναλλακτική διατύπωση
5 επιλογές επενδύσεων
Βάρος → Κόστος επένδυσης
Αξία → Απόδοση
Όριο βάρους → budget

Όχημα ανώτατο όριο βάρους 6 μονάδες

Ποια κιβώτια πρέπει να φορτωθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η αξία του φορτίου;

π.χ. 1 κ' 2 , βάρος = 6
αξία = 10

1, 3, 4 βάρος = 6
αξία = 11 ← καλύτερο

Πρόβλημα κατανομής πόρων

Διατύπωση Δυναμικού Προγραμματισμού

Στάδια → κιβώτια (στο στάδιο t αποφασίζουμε αν θα φορτωθεί ή όχι το κιβώτιο t, $t = 1, 2, \dots, 5$)

$N = 5$ (μήκος ορίζοντα)

Κατάσταση (t, x)

$x =$ ελεύθερο (διαθέσιμο) βάρος στο όχημα μετά από τις αποφάσεις για τα κιβώτια $1, 2, \dots, t-1$
(δηλ. πριν από την απόφαση για το κιβώτιο t)

αποφάσεις : $a_t = \begin{cases} 1, & \text{φορτώνεται το κιβ } t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Σύνολο δυνατών αποφάσεων $D_t(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } x < B_t \\ \{0,1\}, & \text{αν } x \geq B_t \end{cases}$

π.χ. $D_3(1) = \{0\}$, $D_3(4) = \{0, 1\}$

Δυναμική

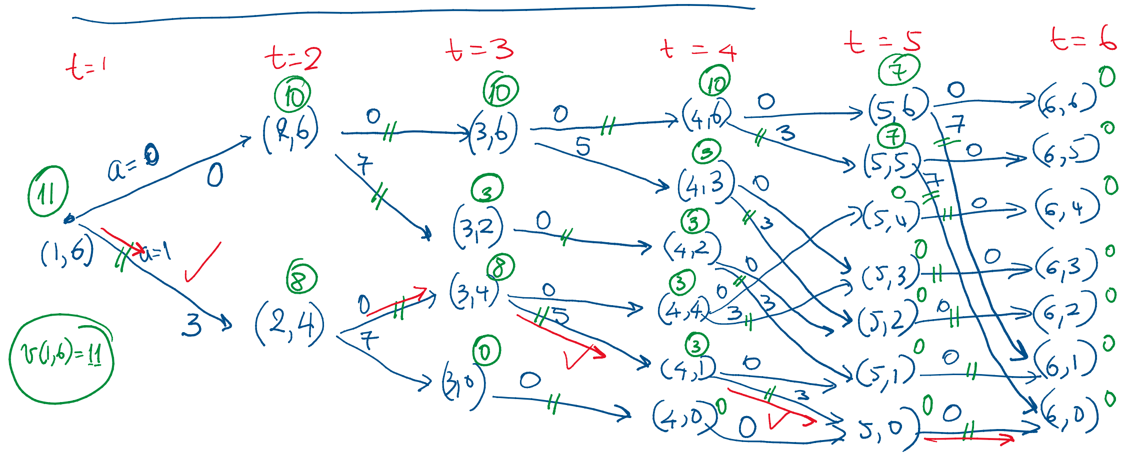
$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = \begin{cases} x_t - B_t, & \text{αν } a_t = 1 \\ x_t, & \text{αν } a_t = 0 \end{cases}$$

Κέρδος ενός βήματος

$$c_t(x_t, a_t) = \begin{cases} A_t, & \text{αν } a_t = 1 \\ 0, & \text{αν } a_t = 0 \end{cases}$$

Τερματικό κέρδος (μετά και την N-οστή απόφαση)

$$\hat{c}_{N+1}(x) = 0$$



Εξισώσεις βελτιστότητας

$v(t,x)$ = μέγιστη δυνατή αξία από τη φόρτωση/ή όχι των κιβωτίων $t, t+1, \dots, 5$
αν στο κιβ. t απομένει βάρος φορτίου $= x$.

$$v(6,x) = 0$$

$t<6$

$$v(t,x) = 0 + v(t+1,x) \qquad x < B_t \quad (D_t(x) = \{0\})$$

$$v(t,x) = \max \begin{cases} A_t + v(t+1, x - B_t) & (a=1) \\ 0 + v(t+1, x) & (a=0) \end{cases} \qquad x \geq B_t \quad (D_t(x) = \{0,1\})$$

$$v(t,x) = \begin{cases} v(t+1,x) & x < B_t \\ \max\{\ \dots\ \} & x > B_t \end{cases}$$

$$v(t,x) = \begin{cases} \\ \max\{ \dots \}, & x \geq B_t \end{cases}$$

$v(6,x)=0$

$v(5,0) = v(6,0) = 0$

$v(5,1) = v(6,1) = 0$

$\vdots$

Βελτιστη λύση $\begin{cases} \text{φορτώνται τα } 1,3,4 \\ \text{μεγιστη αξία } = 11 \end{cases}$

---

3 κατηγορίες εφαρμογών ΔΠ
(Συντήρηση μηχανημάτων
Ελεγχος Αποθεμάτων
Κατανομή Πόρων)

Συντήρηση και αντικατάσταση μηχανήματος

Μηχάνημα : Προγραμματισμός συντήρησης/αντικατάστασης
για N περιόδους

Δεδομένα

N = μήκος ορίζοντα
στην αρχή καθε περιόδου βλέπουμε την ηλικία
του μηχ. κ' αποφασίζουμε αν θα γίνει συντήρηση

του μηχ. κ' αποφασίζουμε αν θα γίνει συντήρηση για μια ακόμη περίοδο ή θα αντικατασταθεί άμεσα από ένα νέο μηχάνημα

$c(x)$ = κόστος συντήρησης μιας περιόδου για μηχ. ηλικίας x (στην αρχή περιόδου)

$\mu(x)$ = αξία μεταπώλησης μηχ. ηλικίας x

T = τιμή αγοράς νέου μηχανήματος

H = ανώτατο όριο ηλικίας

x_1 = αρχική ηλικία (ηλικία μηχ. στην αρχή περιόδου 1)

---

1) Στάδια $\Leftrightarrow$ περίοδοι λειτουργίας $t=1,2,\dots,N+1$

N = αρ. περιόδων προγραμματισμού

2) <u>Κατάσταση</u> (t,x), x = ηλικία μηχανήματος στην αρχή της περιόδου t

3) <u>Αποφάσεις</u> $a = \begin{cases} 1, & \text{συντήρηση} \\ 2, & \text{αντικατάσταση} \end{cases}$

$$D_t(H) = \{2\}$$

$$D_t(x) = \{1, 2\} \qquad x < H$$

4) <u>Δυναμική</u> $\quad x_{t+1} = g_t(x_t, a_t).$

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t + 1, & a=1 \\ 1, & a=2 \end{cases}$$

5) Κόστος μιας περιόδου

$$c_t(x,a) = \begin{cases} c(x), & \text{αν } a=1 \\ T - \mu(x) + c(0), & a=2 \end{cases}$$

6) Τερματικό κόστος (υπόθεση: το πρόβλημα τελειώνει στην αρχή περιόδου N+1 με μεταπώληση του μηχανήματος)

$$\hat{C}(x) = -\mu(x)$$

$v(t,x)$ = ελάχιστο κόστος συντήρησης/αντικατάστασης από περίοδο t έως N+1, αν στην αρχή περιόδου t το μηχάνημα έχει ηλικία x.

$$v(N+1, x) = \hat{C}(x) = -\mu(x)$$

$$v(t, H) = T - \mu(H) + C(0) + v(t+1, 1), \quad t=1,\dots,N, \; x=H$$

$$v(t,x) = \min \begin{cases} C(x) + v(t+1, x+1), \\ T - \mu(x) + C(0) + v(t+1, 1) \end{cases}, \quad t=1,2,\dots,N, \; x<H$$

στο επόμενο μάθημα παράδειγμα με αριθ. δεδομένα.