Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-05-13

Wednesday, May 13, 2020 1:13 PM

Ασκήσεις Δυναμικού Προγραμματισμού

Άσκηση 1 Προγρ. παραγωγής προϊόντος για 4 περιόδους

Περίοδος (t)	Ζήτηση (d_t)	Μον. Κόστος Παραγ. (b_t)
1	3	50
2	3	50
3	4	70
4	1	70

Δυναμ. παραγωγής $m=3$

Χωρ. αποθήκης $M=3$

Σε κάθε περίοδο που θα παραχθεί οποιαδήποτε (θετική) ποσότητα υπάρχει σταθερό κόστος $= 200$.

π.χ. αν στην περ. $t=1$ παραχθούν 2 μονάδες κόστος παραγωγής $K_1(2) = 200 + 50 \times 2 = 300$

Αν δε γίνει παραγωγή $K_1(0)=0$.

Αρχικό απόθεμα για $t=1$ είναι ίσο με 2 μονάδες.

Κόστος αποθήκευσης $h_t = 20$ $t=1,2,3,4$.
(ανα μονάδα προϊόντος)

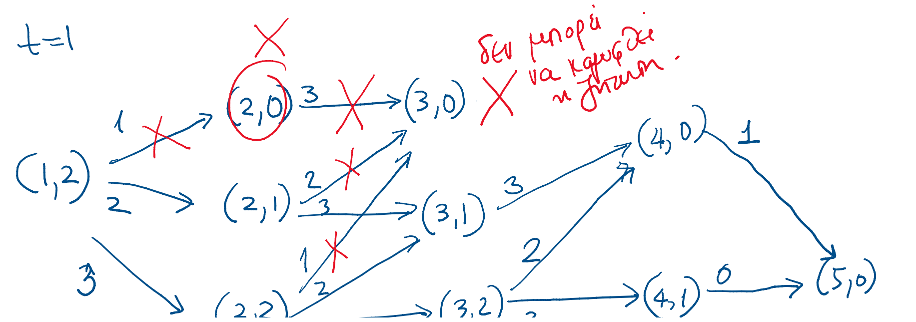
Τερματικό κόστος $\hat{c}(x)=0$.

(t,x) $x=$ απόθεμα στην αρχή περ. t

a : ποσ. παραγ.

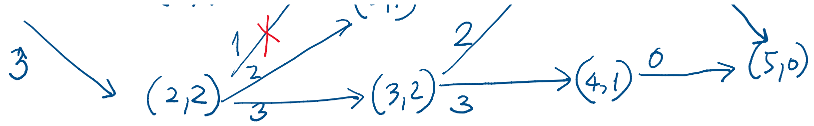
$$v(t,x) = \max_{a \in D_t(x)} \left\{ K_t(a) + h_t(x+a-d_t) + v(t+1, x+a-d_t) \right\} \quad t=1,2,\dots,N$$

$v(N+1,x)=0$



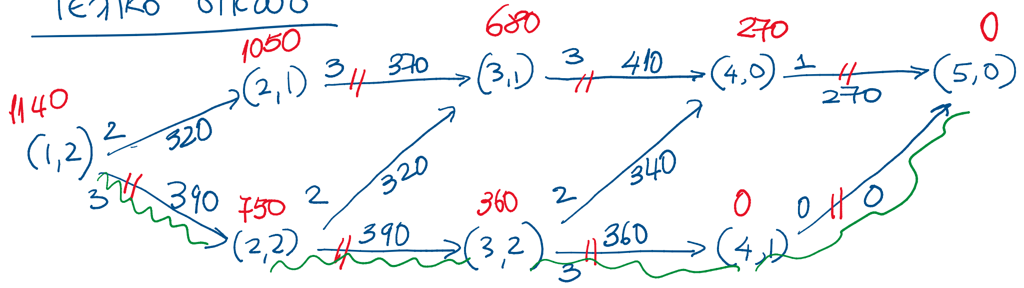
$d_3=4$

$d_4=1$



[στο τελικό στάδιο $t=4$ η βέλτιστη παραγωγή προκύπτει άμεσα]

Τελικό δίκτυο



$(1,2)$, $a=2$: $K_1(2) + h\cdot 1 = 200+50\times 2+20\times 1 = 320$

$K_1(a) + h \cdot \underbrace{x_2}_{(x+a-d_1)}$

$(2,1)$, $a=3$ $\quad K_2(3)+h\cdot 1 = 200+50\times 3+20 = 370$

Με τον ίδιο τρόπο και τα υπόλοιπα

$a^*(1)=3$
$a^*(2)=3$
$a^*(3)=3$
$a^*(4)=0$

συνολική παραγωγή $=9$

αρχικό απόθεμα $=2$

11 ✓

Άσκηση 2 Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max \ 3a_1 - a_1^3 + 5a_2^2 - a_2^3$$
$$\text{υ.π.} \quad a_1 + a_2 \le 4$$
$$a_1, a_2 \ge 0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}.$$

[πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού]

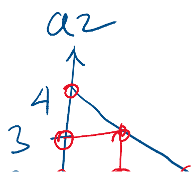
(χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό).

Παρατήρηση Θα μπορούσε να λυθεί άμεσα

Εφικτή περιοχή

$a_1 + a_2 \le 4$

$a_1, a_2 \ge 0$ $\in \mathbb{Z}$

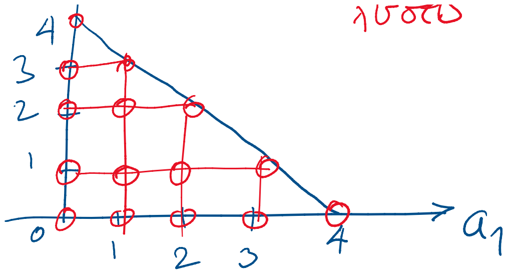


15 εφικτές λύσεις

~~4ο σημείο~~

$a_1, a_2 \geq 0 \; (\in \mathbb{Z})$

λύσεις



Δυναμικός Προγραμματισμός

(Κατανομή πόρων)

$$\max \sum_{t=1}^{N} R_t(a_t)$$

$$\sum_{t=1}^{N} c_t(a_t) \leq b$$

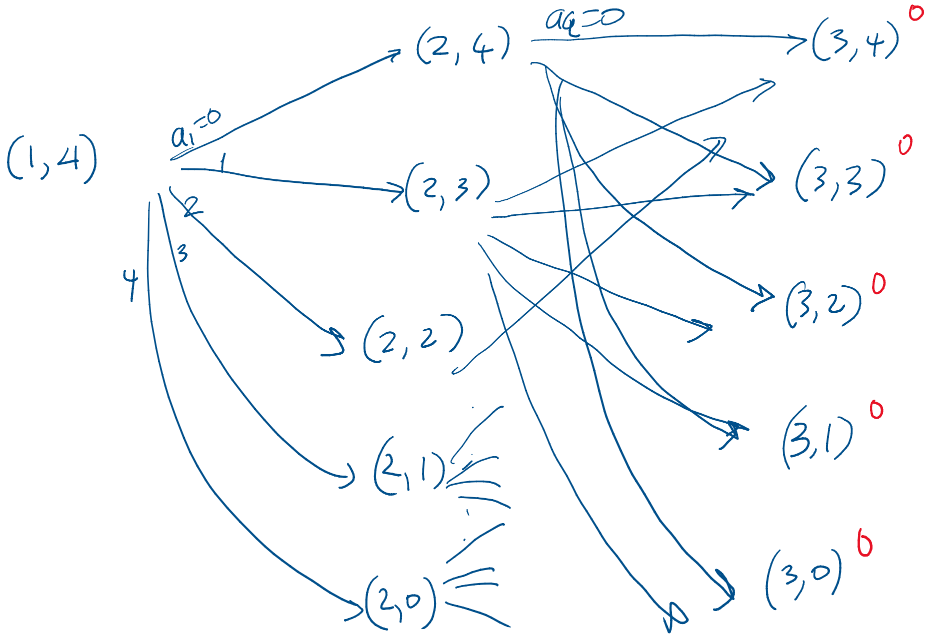
$N = 2$, $R_1(a_1) = 3a_1 - a_1^3$

$R_2(a_2) = 5a_2^2 - a_2^3$

$c_1(a_1) = a_1$

$c_2(a_2) = a_2$ (η $2a_2$ στην αρχική διατύπωση)

$b = 4$



$v(2,4) =$

$a_2 = 0$: $R_2(0) = 5a_2^2 - a_2^3 = 0$

$a_2 = 1$ $R_2(1) = 5 - 1 = 4$

$a_2=1 \quad R_2(1) = 5-1 = 4$

$\vdots$

$R_2(4) = 5\cdot 4^2 - 4^3 = 16$

$$v(2,4) = \max_{a_2=0,1,2,3,4} \{R_2(a_2)+0\} = \max \{R_2(a_2)\}$$

$$v(2,3) = \max_{a=0,1,2,3} \{R_2(a_2)\}$$

$\vdots$

$$v(1,4) = \max_{\underline{a_1=0,1,2,3,4}} \{R_1(a_1) + v(2,4-a_1)\}$$

<u>Άσκηση 3</u> Ανισότητα Αριθμητικού–Γεωμετρικού Μέσου

Αν $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, $a_j>0$, $j=1,\dots,n$

τότε $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = \left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}$

(Να αποδειχθεί με δυναμικό προγραμματισμό)

Θέλουμε να δείξουμε $\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\ln\left[\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{1/n}\right] \leq \ln\left[\frac{\sum a_j}{n}\right]$

$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum^{n} \ln a_j \leq \ln \frac{\sum a_j}{n}$

$$\iff \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln a_j \le \ln \frac{\sum a_j}{n}$$

$$\Rightarrow \quad (*) \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} \ln a_j \le n \ln\left(\frac{\sum a_j}{n}\right)}$$

Να δειχθεί μέσω ΔΠ.

Έστω $a_1+\cdots+a_n = S$

$$\boxed{\forall\, a_1,\dots,a_n>0 : \underline{a_1+\cdots+a_n=S} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \ln(a_j) \le n \ln\frac{S}{n}}$$

παραπέμπει σε πρόβλημα κατανομής πόρων.

Έστω το πρόβλημα

$$v(1,S) = z^* = \max \sum_{j=1}^{n} \ln(a_j)$$

$$\text{s.t.} \quad a_1+\cdots+a_n = S$$

$$a_j > 0$$

πρόβλημα κατανομής πόρων

Αρκεί να δείξουμε $z^* \le n \ln\frac{S}{n}$

$$R_j(a_j) = \ln(a_j) \quad , \quad c_j(a_j) = a_j$$

Όμως γενικά $a_j \notin \mathbb{Z} \Rightarrow D_j(x)$ μη αριθμήσιμο σύνολο.

(t,x) : x = απομένουσα ποσότητα στο βήμα t

$$a_t \le x \rightarrow a_t \in (0,x] = D_t(x)$$

Από τις εξισώσεις βελτιστότητας για το πρόβλημα

Από τις εξισώσεις βελτιστότητας για το πρόβλημα καταναλωτή πόρων:

$$v(t,x) = \max_{0<a\le x} \{ \ln(a) + v(t+1, x-a) \}$$

$t=1,\dots,n$

$v(n+1,x)=0.$

$\underline{t=n}$

$$v(n,x) = \max_{0<a\le x} \{ \ln a + \underbrace{v(n+1, x-a)}_{\text{ίσο}} \}$$

$$= \max_{0<a\le x} \{ \ln a \} = \ln(x) \quad (\text{για } a_n^*(x)=x)$$

$\underline{t=n-1}$

$$v(n-1,x) = \max_{0<a\le x} \{ \ln a + \underbrace{v(n, x-a)}_{\ln(x-a)} \}$$

$$= \max_{0<a\le x} \{ \underbrace{\ln a + \ln(x-a)}_{g(a)} \}$$

$$g'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x-a} , \qquad (\delta.o.\ g''(a)<0 \ \forall a \in (0,x))$$

$$g'(a)=0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{x-a} \Rightarrow \underline{a = \frac{x}{2}}$$: σημείο ολικού μεγίστου της $g(a)$

$$a^*(n-1, x) = \frac{x}{2}$$ η ποσότητα x μοιράζεται εξ ίσου στις 2 τελευταίες δραστηριότητες

$$v(n-1,x) = g\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(x-\frac{x}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Θα μπορούσαμε να υπολ. το $v(n-2,x) = \ldots$

Επαγωγή Υπόθεση:

Όταν απομένουν k βήματα (δηλαδή στο βήμα $n-k+1$)

$$v(n-k+1,x) = k \ln \frac{x}{k} \quad \leftarrow \text{επαγωγική υπόθεση}$$

Επαγωγή για $k=1$ $\quad v(n-1+1,x) = v(n,x) = 1 \cdot \ln \frac{x}{1}$ ✓

Έστω ότι ισχύει για k.

Τότε για $k+1$:

$$v(n-(k+1)+1,x) = v(n-k,x) \quad (\text{από εξ. Bellman})$$

$$= \max_{0<a\leq x} \{ \ln a + \underline{v(n-k+1, x-a)} \} =$$

$$= \max_{0<a\leq x} \{ \underbrace{\ln a + k \ln\left(\frac{x-a}{k}\right)}_{g(a)} \}$$

$$\ln\left(\frac{x-a}{k}\right) = \ln(x-a) - \underline{\ln k}$$

$$g'(a) = \frac{1}{a} - k\frac{1}{x-a}$$

$g''(a) < 0$ (δείξτε το)

$$g'(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{x-a} \Rightarrow ka = x-a \Rightarrow \boxed{a^* = \frac{x}{k+1}}$$

$$\Rightarrow g(a^*) = \ln\left(\frac{x}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{x - \frac{x}{k+1}}{k}\right) =$$

$$\Rightarrow g(a^*) = \ln\left(\frac{x}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{x - \frac{x}{k+1}}{k}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{x}{k+1}\right) = (k+1)\ln\left(\frac{x}{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow v(n-k, x) = (k+1)\ln\left(\frac{x}{k+1}\right)$$

αποδείχθηκε η επαγωγική υπόθεση για $k+1$.

Γενικά $\underline{v(n-k, x) = (k+1)\ln\left(\frac{x}{k+1}\right)}$

$$v(1, S) = v(n - \overbrace{(n-1)}^{k}, S) = n \ln\frac{S}{n}$$

Επομένως
$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} \ln(a_j) \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_j = S \end{array} \right\} = n \cdot \ln\frac{S}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \ln(a_j) \le n \ln\frac{S}{n} \quad \forall a_1, \dots, a_n > 0 \text{ τ.ω } a_1 + \dots + a_n = S}$$

ανισότητα γεωμ. αριθ. μέσου.

→ το άνω φράγμα επιτυγχάνεται για $a_1 = \dots = a_n = \frac{S}{n}$