Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-05-18

Monday, May 18, 2020 1:16 PM

Μη Γραμμικός Προγραμματισμός

Παραδείγματα μοντέλων μ.γ.π.

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$

Μια υπολογιστική μέθοδος για βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς

Παράδειγμα 1

Στο γ.π. είδαμε προβλήματα παραγωγής

π.χ. ελαχιστ. κόστους παραγωγής

n : προϊόντα

m πρώτες ύλες, a_{ij} ποσ. πρ. ύλης i/μον. πρ. j

b_i = διαθ. ποσ. i

c_j = κόστος/μονάδα πρ. j

d_j = ζήτηση πρ. j

x_j = ποσ. παραγ. προϊόντος j, $j=1,\dots,n$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0$$

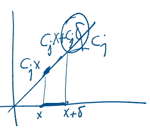
ΠΓΠ

Κόστος παραγωγής πρ. j $\quad C_j(x)$ = κόστος παραγωγής ποσότητας x από προϊόν j

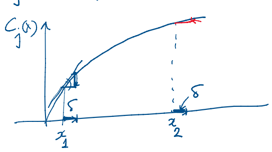
$C_j(x) = c_j \cdot x$

$C_j'(x) = c_j$

αύξηση κόστους/μον. αύξησης παραγωγής



$C_j'(x)$: οριακό κόστος.



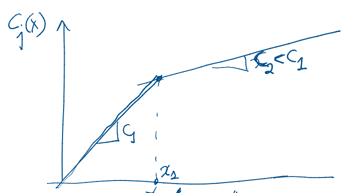
$C_j(x)$: αύξουσα κοίλη

$C_j'(x) > 0$

$C_j''(x) < 0 \Rightarrow \boxed{C_j'(x) \downarrow x}$

Το κόστος αύξησης της παραγωγής από x σε $x+\underline{\delta}$ (για $\delta>0$) μειώνεται όσο αυξάνει το x.

[οικονομίες κλίμακας]



$\nexists\, C_j'(x), C_j''(x)$

$$\left.\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} C_j(x_j) \leftarrow \text{μη γραμμική} \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i=1,\dots,m \\ &x_j \ge 0, \; j=1,\dots,n \end{aligned}\right\} \text{Π.Μ.Γ.Π.}$$

Παράδειγμα 2

Διαθέσιμο ποσό b για επένδυση σε n μετοχές.

Στοιχεία $\quad \mu_j$: μέση απόδοση μετοχής j = $E(R_j)$

n μετοχές.

Στοιχεία

μ_j : μέση απόδοση μετοχής $j = E(R_j)$

a_j : κόστος αγοράς " j σήμερα

σ_{ij} : συνδιακύμανση μετ. i με μετ. j

$= E(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)$, R_j = απόδοση (τμ) της j

Αν x_j = αρ. μετοχών j που θα αγοραστούν:

$$\text{Συν. κόστος} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \qquad \text{(περιορισμός)}$$

$$\text{Μέση απόδοση} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

$$\text{Διακύμανση απόδοσης} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

Μοντέλα

(1) $\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$

$\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_i x_j \le V$

$x_i, x_j \ge 0$

(2) $\min \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_i x_j$

υ.π. $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$

$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \ge \ell$

$x_j \ge 0 \quad \forall j$

(3) $\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - r \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \right]$

υ.π. $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$,

Μοντέλο Markowitz and Sharpe.

r = συντελεστής αποστροφής κινδύνου

$r \uparrow$: αυξάνει η αποστροφή προς κίνδυνο (διασπορά)

Παράδειγμα 3 Απόδοση μιας παραγωγής/μον. χρ.

Παραγωγή n προϊόντα

m πρώτες ύλες, (a_{ij}, b_i όπως Παρ. 1)

T_j = καθαρό κέρδος/μον. προϊόντος j

c = κόστος έναρξης παραγωγής σταθερό (πάγιο)

τ_j = καθαρό κέρδος/μον. προϊόντος j

C = κόστος έναρξης παραγωγής σταθερό (πάγιο)

d_j = απαιτ. ώρες εργασίας/μον. πρ. j

d_0 = απαιτ. χρ. " για έναρξη παραγωγής

x_j = ποσότητα παραγ. πρ. j

Συνολικό κέρδος $= \sum_{j=1}^{n} \tau_j x_j - C$

Συνολικός χρόνος εργ $= \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0$

Ρυθμός απόδοσης παραγωγής/ώρα εργασίας

$$\max \frac{\sum_{j=1}^{n} \tau_j x_j - C}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}$$

(κλασματικός προγραμματισμός)

$$\text{υ.π.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0.$$

Προβλήματα Χωρίς Περιορισμούς

(Βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών).

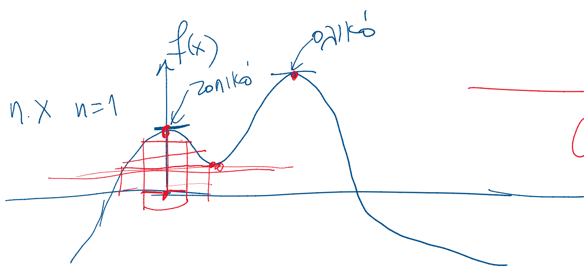
$$\max_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} f(\underline{x})$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists$ συνεχείς παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης

$\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο αν $f(\underline{x}^*) \ge f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο αν $\exists \varepsilon > 0 : f(\underline{x}^*) \ge f(\underline{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x - x^*\| < \varepsilon$

π.χ $n=1$



Αν $\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0$ τοπικό μέγιστο

$f''(x_0) < 0 \Big\}$ τοπικό μέγιστο

Ορισμός ① Ανάδελτα (gradient) (βαθμίδα)

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\right)$$

② Hessian matrix (Εσσιανός πίνακας)

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

συμμετρικός πίνακας

③ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας $n\times n$

Τετραγωνική μορφή $Q_A(\underline{x}) = \underline{x}' A \cdot \underline{x}$ $(\in \mathbb{R})$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

A θετικά ορισμένος (positive definite) αν $Q_A(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

A " ημιορισμένος (" semidefinite) αν $Q_A(x) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

A αρνητικά ορισμένος (negative -||-) αν $Q_A(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

A " ημιορ. $Q_A(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

A μη ορισμένος αν $Q_A(\underline{x}) > 0$ κ' $Q_A(\underline{y}) < 0$ για κάποια $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

κριτήρια

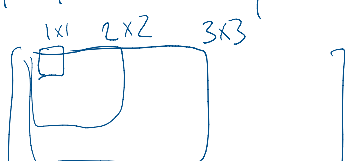
A θετικά ορισμένος $\iff$

Όλες οι ιδιοτιμές του > 0 $\iff$

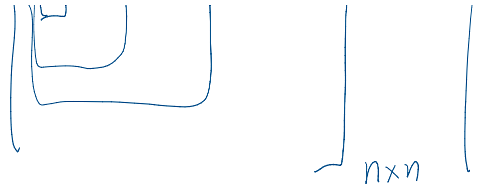
Όλοι οι αριστεροί άνω τετρ. υποπίνακες: $|\quad| > 0$

$|cA| = c^n |A|$

$|-A| = (-1)^n |A|$



A αρνητικά ορισμένος $\iff -A$ θετικά ορισμένος



$n\times n$

A αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ $-A$ θετικά ορισμένος

Συνθήκες τοπικού μεγίστου $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (C^2)

1) <u>Αναγκαία συνθήκη</u> Αν $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο τότε

1) $\nabla f(\underline{x}^*)=0$
2) $Hf(\underline{x}^*)$ αρνητικά ημιορισμένος

2) <u>Ικανή συνθήκη</u> Αν για $x^*\in\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \nabla f(\underline{x}^*)=0 \\ \text{και}\ 2)\ Hf(\underline{x}^*)\ \text{αρνητικά}\ \underline{\text{ορισμένο}} \end{array}\right\} \Rightarrow x^* \text{ σημείο τοπ. μεγίστου}$$

<u>Παραδ.</u> $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3$$

$$\nabla f(\underline{x})=\left(1-2x_1,\ x_3-2x_2,\ 2+x_2-2x_3\right)$$

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{δ.ο. } H \text{ αρνητικά ορισμένος}}$

Παίρνω $-H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

δείχνουμε
ότι οι α
αριστ τε
πίνακες

$$\Rightarrow -H \ \text{θ.ο.}$$

$$\Rightarrow H \ \text{α.ο.}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1-2x_1 &= 0 \\ x_3 - 2x_2 &= 0 \\ 2 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

μον
σημ
τοπι
τότ

(τοπικό μέγιστο

=

ανω

ερ.

$|| > 0$

αδικό

ιτίο

κού ακρο-

σσ

).