Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-05-20

Wednesday, May 20, 2020 1:14 PM

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)$

$\nabla f(x^*) = 0$

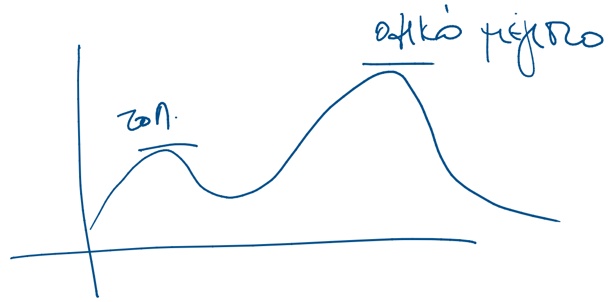
$Hf(x^*)$: αρν. ημιορισμένος

αναγκαία συνθ. μεγίστου

$\nabla f(x^*) = 0$

$Hf(x^*)$ αρν. ορισμένος

ικανή συνθ. μεγίστου



Κοίλες και κυρτές συναρτήσεις

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ κυρτή [κοίλη]

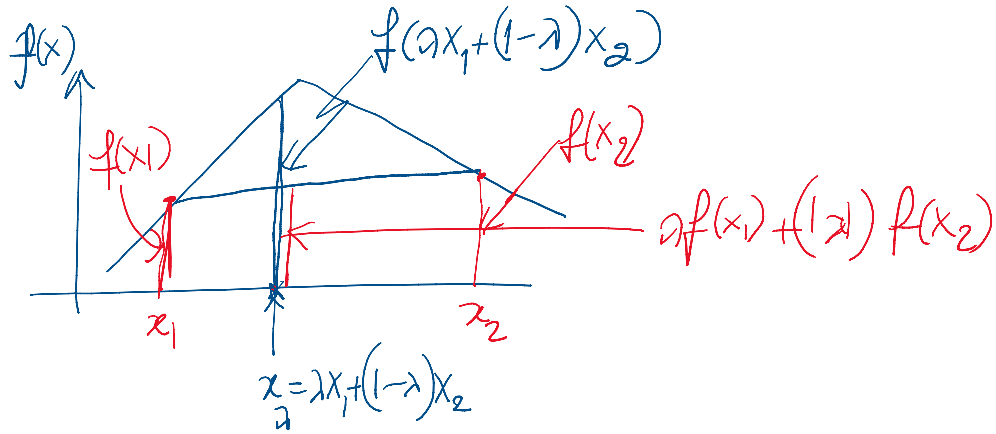
όταν $\forall\ \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0,1]$

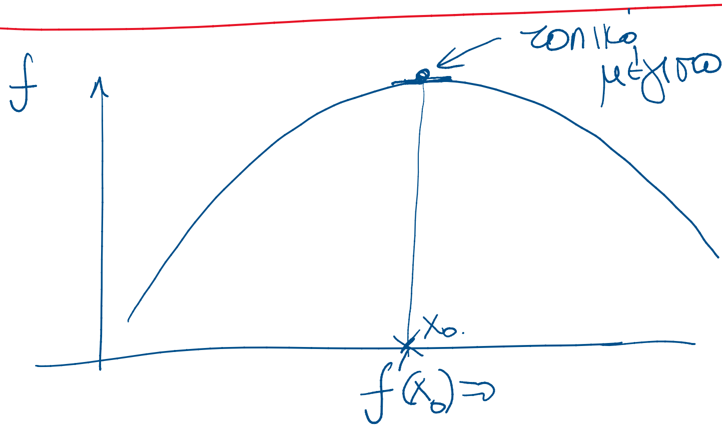
$$f(\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) \le \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda) f(\underline{x}_2)$$

$[\ge]$

Αν $f \in C^2$ $\quad$ κυρτή [κοίλη] $\quad$ αν $\quad Hf(\underline{x})$ θετικά ημιορ. [αρνητικά] $\forall\ \underline{x}$

$f(x)$ $\qquad$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$



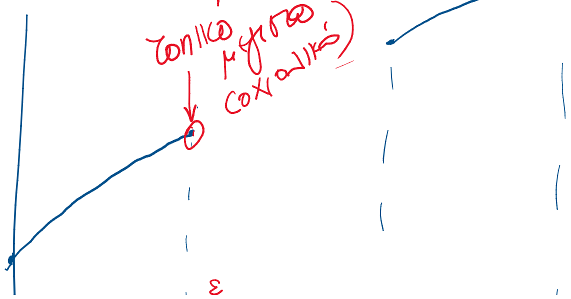


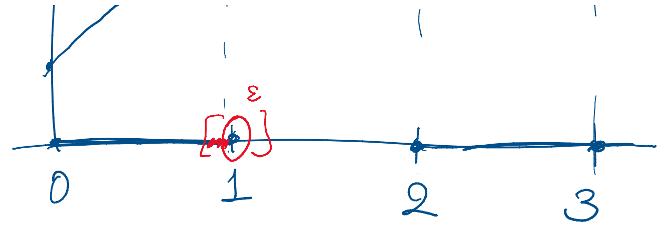
Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } f: F \to \mathbb{R},\ F \subseteq \mathbb{R}^n \\ f: \text{κοίλη} \\ F: \text{κυρτό σύνολο} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ κάθε τοπικό μέγιστο της f είναι και ολικό.

π.χ. $n=1$





Στο εξής θα υποθέτουμε ότι σε ένα ΠΜΓΠ η αντικ. συνάρτηση f είναι <u>κοίλη</u>

(1) Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί ($F=\mathbb{R}^n$) τότε κάθε τοπικό μέγιστο της f είναι και ολικό.

(2) $Hf(\underline{x})$ αρν. ημιορ. $\forall\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

$\Longrightarrow$ αναγκαία συνθήκη τοπ. μεγίστου $\nabla f(x^*)=0$

<u>Ερώτημα</u>: Πόσο εύκολο είναι να λυθεί η $\nabla f(\underline{x}^*)=0$?

$$\nabla f(\underline{x}^*)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)=0 \end{cases}$$

Προσεγγιστικός αλγόριθμος λύσης! <u>Αλγόριθμος βαθμίδας</u> (gradient search method)

(gradient search method)

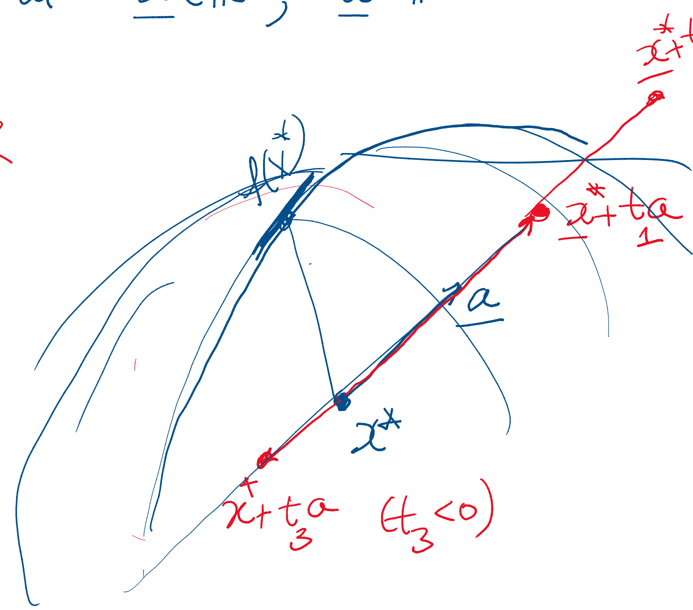
Συνάρτηση βαθμίδας $\nabla f(\underline{x})$

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, και $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$g_a(t) = f(\underline{x}^* + t\underline{a}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g_a'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}^* + h \cdot \underline{a}) - f(\underline{x}^*)}{h}$$

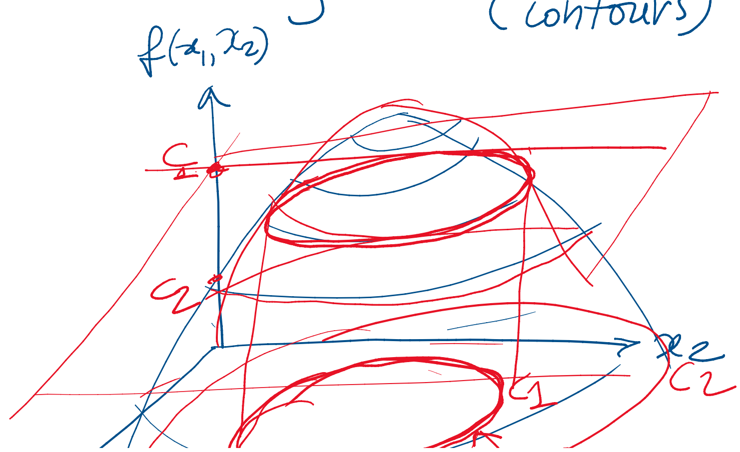
κατευθ. παράγωγος της f στο x^* με κατεύθυνση $\underline{a}$

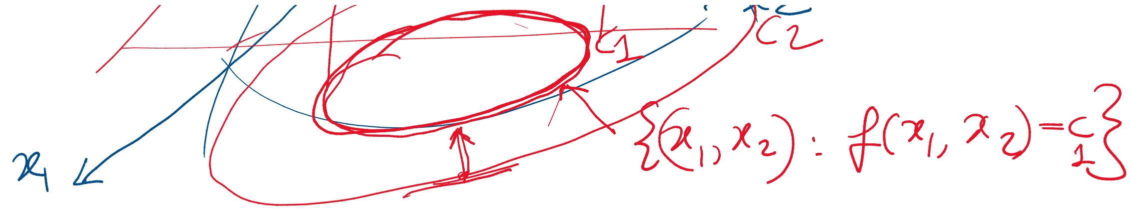


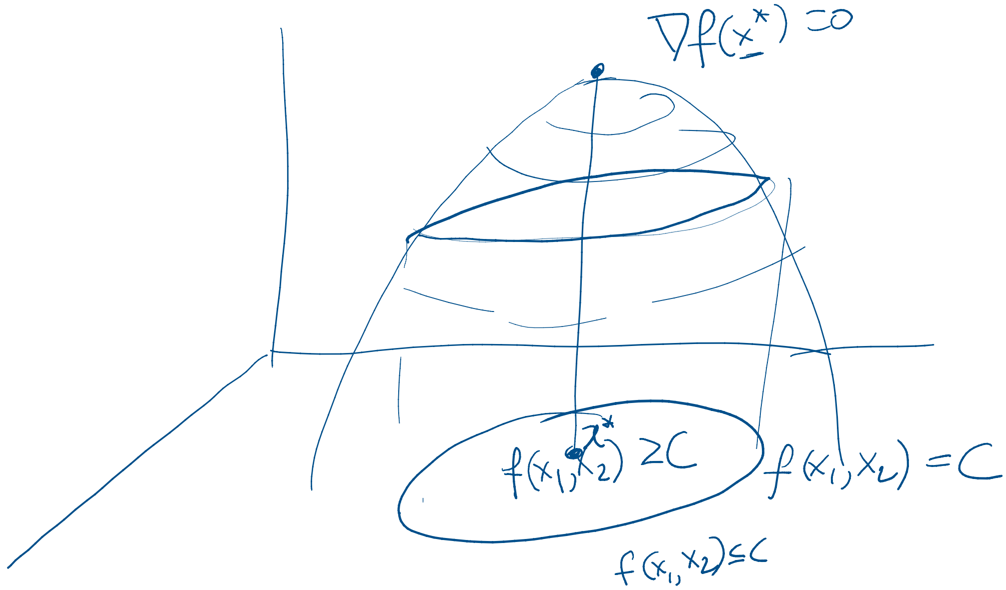
$$g_a'(0) = \nabla f(\underline{x}^*) \cdot \underline{a} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)$$

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = c \}$ ισοδυναμική επιφάνεια της f (contours)

$\underline{n=2}$



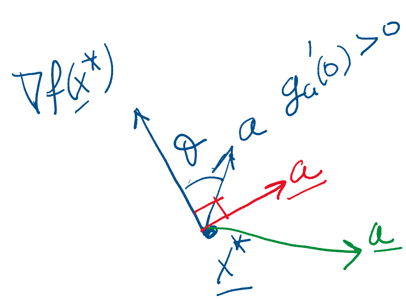




$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^2$

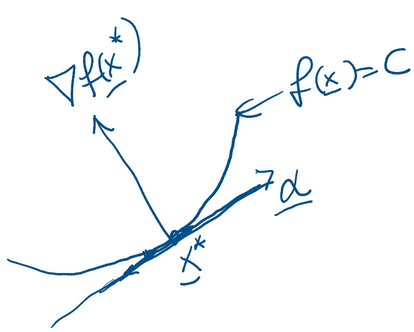
$x^* + t\underline{\alpha}$



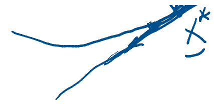
$g_a = f(\underline{x}^* + t\underline{a})$

αν $\nabla f(x^*) \cdot \underline{\alpha} = 0$

$g_a'(0) = \nabla f(x^*) \cdot \underline{\alpha}$



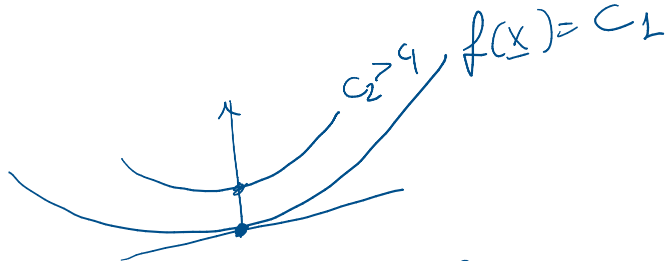
$\nabla f(\underline{x}^*)$ κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο της $f(\underline{x}) = c$ στο $\underline{x}^*$



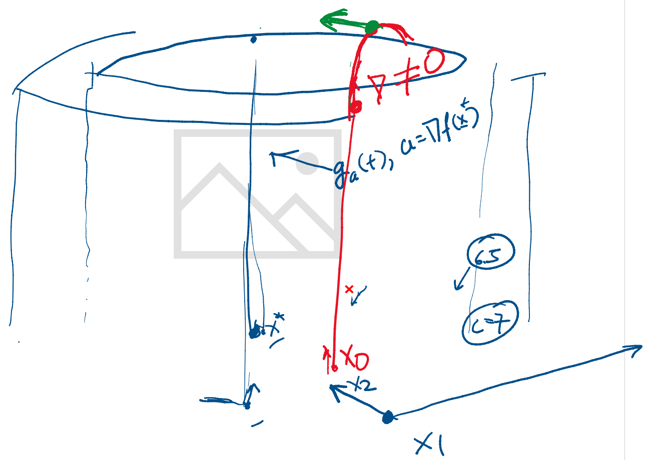
της $f(\underline{x}) = c$ στο σημείο $\underline{x}^*$

<u>Επίσης</u> $\quad g_a'(0) = \|\nabla f(\underline{x}^*)\| \cdot \|\underline{a}\| \cdot \cos(\theta)$

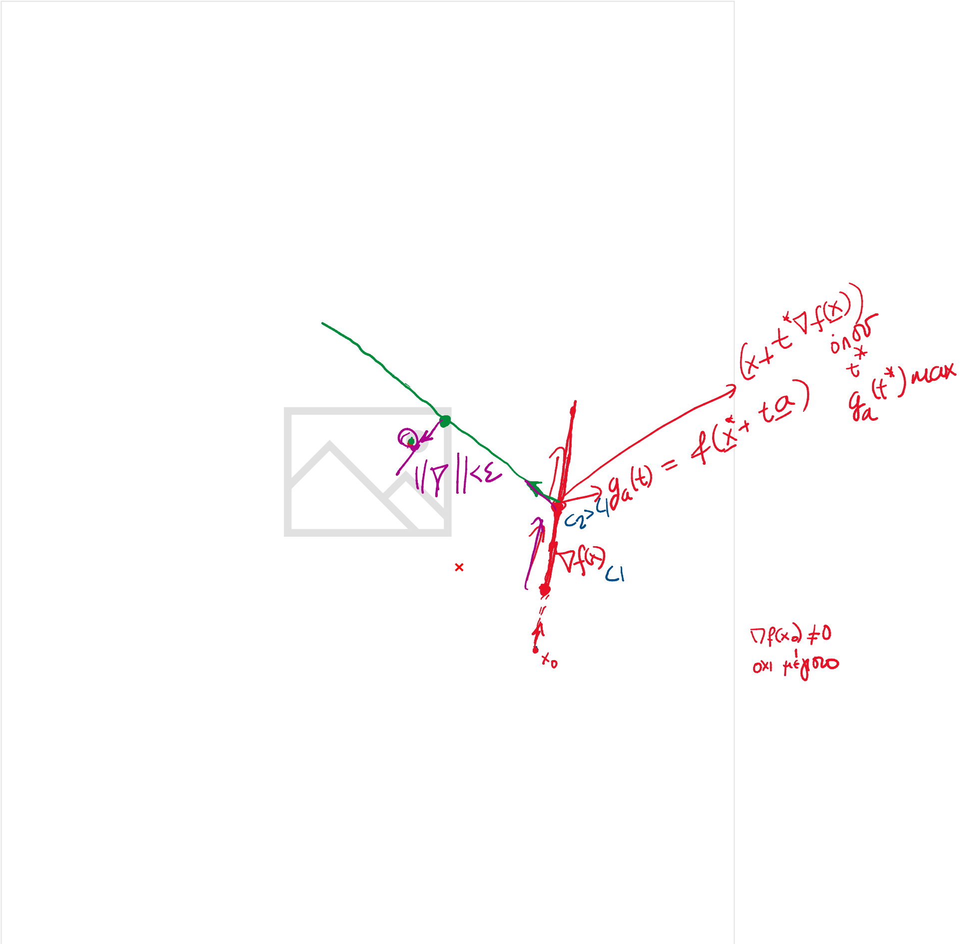
$g_a'(0)$ max όταν $\underline{a} = \lambda \nabla f(x^*)$ για κάποιο $\lambda > 0$



$$f(x_1, x_2) = 5 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$



$\nabla f(\underline{x}^*) = 0$



Αλγόριθμος Βαθμίδας

Αρχικά Επιλέγουμε σημείο εκκίνησης $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Ορίζουμε ε ως επιθυμητή προσέγγιση για το $\|\nabla f(\underline{x})\| = 0$

Στην επανάληψη j έχω υπολογίσει το σημείο $\underline{x}_j$

Υπολογίζουμε $\nabla f(\underline{x}_j)$

$$g(t) = f\left(\underline{x}_j + t\nabla f(\underline{x}_j)\right), \quad t \geq 0$$

$g(t)$ συνάρτηση μιας μεταβλητής

Βρίσκουμε t^* τέτοιο ώστε

$$g(t^*) = \max_{t \geq 0} g(t)$$

$$g(t^*) = \max_{t \geq 0} g(t)$$

Θέτουμε $\boxed{\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + t^* \nabla f(\underline{x}_j)}$

Ξεκινάμε την επανάληψη $j+1$ με σημείο $\underline{x}_{j+1}$

Κριτήριο Διακοπής: αν $\|\nabla f(\underline{x}_j)\| < \varepsilon$

τότε σταματάμε και

$\underline{x}_j$ προσεγγιστικό σημείο μεγίστου