Επιχειρησιακή Έρευνα: Μαθηματικός Προγραμματισμός

Σειρά Ασκήσεων 1: Γραμμικός Προγραμματισμός

ΑΣΚΗΣΗ 1. Μια εταιρεία παράγει n προϊόντα, χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες και ένα μηχάνημα. Για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j απαιτούνται a_{ij} μονάδες από την πρώτη ύλη i και t_j μονάδες χρόνου για επεξεργασία στο μηχάνημα. Στη διάρκεια μιας εβδομάδας υπάρχουν διαθέσιμες b_i μονάδες πρώτης ύλης i, $i = 1, \ldots, m$, ενώ το μηχάνημα είναι διαθέσιμο για T μονάδες χρόνου λειτουργίας. Κάθε μονάδα προϊόντος j έχει κέρδος c_j, $j = 1, \ldots, n$.

Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα μεγιστοποίησης των εβδομαδιαίων κερδών από την παραγωγή αυτών των προϊόντων.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Μια εταιρεία παράγει n προϊόντα, χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες και l μηχανήματα. Για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j απαιτούνται a_{ij} μονάδες από την πρώτη ύλη i. Το προϊόν j απαιτεί t_j μονάδες χρόνου για επεξεργασία σε οποιοδήποτε μηχάνημα. Επίσης η επεξεργασία της παραγόμενης ποσότητας ενός προϊόντος δεν είναι απαραίτητο να γίνει εξ ολοκλήρου σε ένα μηχάνημα, αλλά μπορεί να κατανεμηθεί σε περισσότερα από ένα μηχανήματα. Στη διάρκεια μιας εβδομάδας υπάρχουν διαθέσιμες b_i μονάδες πρώτης ύλης i, $i = 1, \ldots, m$, ενώ το μηχάνημα k είναι διαθέσιμο για T_k μονάδες χρόνου λειτουργίας, $k = 1, \ldots, l$. Κάθε μονάδα προϊόντος j έχει κέρδος c_j, $j = 1, \ldots, n$.

Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα μεγιστοποίησης των εβδομαδιαίων κερδών από την παραγωγή αυτών των προϊόντων.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Ένα εμπορικό αεροσκάφος χωρίζεται σε τρία διαμερίσματα και έχει τα παρακάτω ανώτατα όρια βάρους και όγκου φορτίου σε κάθε διαμέρισμα:

Διαμέρισμα	Όριο Βάρους (τόνοι)	Όριο Όγκου (κμ)
Εμπρός	12	250
Μεσαίο	18	320
Πίσω	10	200

Οι κανονισμοί ασφάλειας πτήσης απαιτούν το βάρος του φορτίου σε κάθε τμήμα ως ποσοστό του αντίστοιχου ανώτατου ορίου να είναι το ίδιο στα τρία διαμερίσματα του αεροσκάφους.

Η μεταφορική εταιρεία που χρησιμοποιεί το αεροσκάφος έχει πάρει προσφορές να μεταφέρει 4 φορτία. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται το συνολικό βάρος, ο συνολικός όγκος και η συνολική αμοιβή της εταιρείας από καθένα από τα φορτία:

Φορτίο	Βάρος (τόνοι)	Όγκος (κμ)	Αμοιβή
1	15	360	7500
2	18	500	9200
3	10	430	6800
4	12	180	8000

Η εταιρεία μπορεί να δεχθεί να μεταφέρει μέρος από κάθε φορτίο, με αντίστοιχο ποσοστό της αμοιβής. Θέλει να προσδιορίσει ποιο μέρος κάθε φορτίου θα δεχθεί να μεταφέρει και πώς θα το κατανείμει στα διαμερίσματα του αεροσκάφους, ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική αμοιβή.

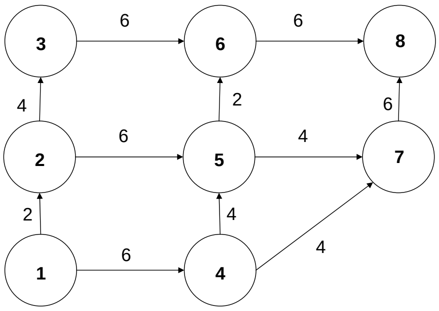
Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Ένα εργαστήριο παράγει ένα εποχιακό προϊόν του οποίου θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή για τους επόμενους 3 μήνες κατά τους οποίους διαρκεί η ζήτηση. Το εργαστήριο έχει παραγγελίες για 200 προϊόντος τον πρώτο μήνα, 400 μονάδες το δεύτερο και 300 μονάδες τον τρίτο μήνα. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι ίσο με 2 τον πρώτο μήνα, 2.5 το δεύτερο και 4 τον τρίτο μήνα. Η παραγωγή και η αποστολή των παραγγελιών στους πελάτες γίνεται στην αρχή κάθε μήνα. Η μέγιστη δυνατή ποσότητα παραγωγής τον πρώτο μήνα είναι ίση με 600 μονάδες, το δεύτερο μήνα 200 μονάδες και τον τρίτο μήνα 400 μονάδες. Το προϊόν διατηρείται σε απόθεμα και ποσότητες που παράγονται σε ένα μήνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ικανοποιήσουν παραγγελίες επόμενων μηνών. Το κόστος αποθήκευσης για ποσότητες που διατηρούνται σε απόθεμα είναι ίσο με 0.7 ανά μήνα και ανά μονάδα προϊόντος.

Το εργαστήριο θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες παραγωγής στην αρχή κάθε μήνα που ικανοποιούν τη ζήτηση και ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος παραγωγής και αποθήκευσης.

(α) Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές απόφασης τις ποσότητες παραγωγής στην αρχή κάθε μήνα.
(β) Να οριστεί ένα ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές απόφασης τις ποσότητες παραγωγής στην αρχή κάθε μήνα και τις ποσότητες που διατηρούνται σε απόθεμα κάθε μήνα μετά την παραγωγή και την αποστολή των παραγγελιών.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το δίκτυο μιας εταιρείας μεταφορών, όπου οι κόμβοι αντιστοιχούν σε τοποθεσίες και οι ακμές σε οδικές συνδέσεις. Οι αριθμοί στις ακμές αντιστοιχούν στο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος στην αντίστοιχη ακμή.



Σε μια συγκεκριμένη περίοδο η εταιρεία έχει αποθηκευμένες ποσότητες 300 μονάδων προϊόντος στην τοποθεσία 1 και 300 μονάδων στην τοποθεσία 3 και ζήτηση 400 μονάδων που πρέπει να παραδοθούν στην τοποθεσία 8.

(α) Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το σχεδιασμό της μεταφοράς με το ελαχιστο δυνατό κόστος, έτσι ώστε να ικανοποιηθεί πλήρως η ζήτηση στην τοποθεσία 8.
(β) Έστω ότι κατά τη συγκεκριμένη περίοδο που πρέπει να γίνει η μεταφορά, η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί σε οποιαδήποτε ακμή είναι 150 μονάδες προϊόντος. Αν στην τοποθεσία 8 παραδοθεί μικρότερη ποσότητα από τη ζητούμενη των 400 μονάδων, υπάρχει ένα κόστος ίσο με 10 ανά μονάδα προϊόντος που δεν ικανοποιείται. Να οριστεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το σχεδιασμό της μεταφοράς με το ελαχιστο δυνατό κόστος κάτω από τις νέες υποθέσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί διακριτή κατανομή με δυνατές τιμές $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, \ldots, p_n$. Θεωρώντας τις τιμές $a_1, a_2, \ldots, a_n$

σταθερές, ζητείται να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη δυνατή τιμή της διασποράς της X κάτω από τον περιορισμό ότι η μέση τιμή της είναι ίση με m.

Να οριστούν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού για τα παραπάνω δύο ερωτήματα.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Έστω το μη κενό κυρτό πολύεδρο $F = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, όπου $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Να βρεθεί ένας τρόπος για να απαντηθεί το ερώτημα αν το F έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το υπερεπίπεδο $c'x = d$, όπου $c \in \mathbf{R}^n$, $d \in \mathbf{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού $z_1 = \max\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$ και $z_2 = \min\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Σε όσες περιπτώσεις υπάρχουν πολλαπλές βέλτιστες λύσεις να προσδιοριστεί το σύνολο όλων των βέλτιστων λύσεων.

(1)

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_2 - x_1 \\ \text{υ.π.} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_2 - x_1 \\ \text{υ.π.} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_2 - x_1 \\ \text{υ.π.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_2 - x_1 \\ \text{υ.π.} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_2 - 2x_1 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 3x_2 \\ \text{υ.π.} & 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_2 - 2x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(α) Να λυθεί γραφικά.
(β) Να γραφεί σε κανονική μορφή $\max\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$.

(γ) Για κάθε 2×2 υποπίνακα B του πίνακα A να εξεταστεί αν ο B αντιστοιχεί σε βασική λύση. Αν ναι, να βρεθεί το σημείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στη βασική λύση και να εξεταστεί αν η λύση είναι εφικτή.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 \\ \text{υ.π.} & 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_2 - 2x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(α) Να λυθεί γραφικά.
(β) Να γραφεί σε κανονική μορφή $\max\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$.
(γ) Για κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής να βρεθεί η αντίστοιχη βασική εφικτή λύση και να εξεταστεί αν είναι μη εκφυλισμένη ή εκφυλισμένη. Για κάθε κορυφή να βρεθούν όλοι οι βασικοί πίνακες που αντιστοιχούν σε αυτήν.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{υ.π.} & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(α) Να σχηματιστεί το δυικό πρόβλημα.
(β) Να λυθεί το πρωτεύον πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.
(γ) Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του δυικού προβλήματος χρησιμοποιώντας τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος.

ΑΣΚΗΣΗ 12. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{υ.π.} & -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(α) Να σχηματιστεί το δυικό πρόβλημα.
(β) Να λυθεί το πρωτεύον πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.
(γ) Να λυθεί το δυικό πρόβλημα γραφικά.
(δ) Να δειχθεί ότι και τα δύο προβλήματα είναι αδύνατα.

ΑΣΚΗΣΗ 13. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{υ.π.} & x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ & -6x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(α) Να σχηματιστεί το δυικό πρόβλημα.

(β) Να λυθεί το πρωτεύον πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.
(γ) Να λυθεί το δυικό πρόβλημα με βάση τη λύση του πρωτεύοντος.
(δ) Να επαληθευτεί η απάντηση του (γ) λύνοντας το δυικό πρόβλημα γραφικά.

ΑΣΚΗΣΗ 14. Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού $\max\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$, όπου $P_1, \ldots, P_6$ οι στήλες του πίνακα A, δίνεται μερικά συμπληρωμένο το tableau Simplex σε μια επανάληψη του αλγορίθμου:

		c'	-1.00	2.00	-3.00	0.00	0.00	0.00
B	c_B	$B^{-1}b$	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-1.00	2.00	1.00	-2.00	1.00	0.00	0.00	-1.00
P5	0.00	1.00	0.00	2.00	-1.00	0.00	1.00	0.00
P4	0.00	4.00	0.00	0.50	0.00	1.00	0.00	0.50

(α) Να συμπληρωθεί το tableau Simplex.
(β) Να δειχθεί ότι η επανάληψη αυτή αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση και να βρεθεί το διάνυσμα της βέλτιστης λύσης και η βέλτιστη τιμή του προβλήματος.
(γ) Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του δυικού προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 15. Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού $\max\{c'x : Ax = b, x \geq 0\}$, όπου $P_1, \ldots, P_6$ οι στήλες του πίνακα A, δίνεται μερικά συμπληρωμένο το tableau Simplex σε μια επανάληψη του αλγορίθμου:

		c'	0.00	-1.00	r	0.00	-2.00	0.00
B	c_B	$B^{-1}b$	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	0.00	7.00	1.00	3.00	-1.00	0.00	2.00	0.00
P4	0.00	12.00	0.00	-2.00	4.00	1.00	0.00	0.00
P6	0.00	10.00	0.00	-4.00	3.00	0.00	8.00	1.00

(α) Να συμπληρωθεί το tableau Simplex.
(β) Να βρεθεί η Βασική Εφικτή Λύση που αντιστοιχεί σε αυτή την επανάληψη.
(γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου r είναι η λύση αυτή βέλτιστη;
(δ)Έστω ότι το r βρίσκεται στην περιοχή τιμών όπου η τρέχουσα λύση δεν είναι βέλτιστη. Να εκτελεστεί μια επιπλέον επανάληψη της μεθόδου Simplex, να καταστρωθεί το νέο tableau και να δειχθεί ότι ούτε η νέα λύση είναι βέλτιστη.

ΑΣΚΗΣΗ 16. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ \text{υ.π.} & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 20 \\ & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 >= 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

και η βέλτιστη λύση του $x^* = (0\ 0\ 4\ 0)'$.

Να σχηματιστεί το δυικό πρόβλημα και να βρεθεί η βέλτιστη λύση του από τη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος.