Άσκηση 13η

Να μετατρέψετε σε κανονική μορφή το παρακάτω π.γ.π.

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 11 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\
& -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 8 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Λύση

Έστω $x_2 = -x_2'$ όπου $x_2' \geq 0$

$x_3 = x_3' - x_3''$ όπου $x_3', x_3'' \geq 0$

στον 1ο & 3ο περιορισμό θα προσθέσω & αφαιρέσω αντίστοιχα $x_4 \geq 0$ & $x_5 \geq 0$

min $\to$ $-$max πολ/ντας με (-1)

& στον 2ο περιορισμό πολ/ζω με (-1)

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
-\max\ & -2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' \\
& x_1 - 2x_2' - x_3' + x_3'' + x_4 = 11 \\
& -x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'' - x_5 = 8 \\
& x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Άσκηση 14η

Να μετατρέψετε σε κανονική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1+3x_2-5x_3 \\ & x_1+x_2 = 10 \\ & -2x_1+3x_2+4x_3 \leq -5 \\ & 7x_1-4x_2+x_3 \leq 6 \\ & x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0,\ x_3\leq 0 \end{aligned}$$

Λύση

Έστω $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1', x_1'' \geq 0$

$x_3 = -x_3'$, $x_3' \geq 0$

στον 2ο πολ. με -1 κ μετά αφαιρώ x_4 , $x_4 \geq 0$.

στον 3ο προσθ. $x_5 \geq 0$

άρα

$$\begin{aligned} -\max\ & -2x_1'+2x_1''-3x_2-5x_3' \\ & x_1'-x_1''+x_2 = 10 \\ & 2x_1'-2x_1''-3x_2+4x_3'-x_4 = 5 \\ & 7x_1'-7x_1''-4x_2-x_3'+x_5 = 6 \\ & x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 15η

Να λυθεί το π.γ.π. $\max.\ 3x_1 + 5x_2$

$$x_1 + x_2 \le 200$$
$$x_1 + 2x_2 \le 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Λύση

Το φέρουμε σε κανονική μορφή $\Rightarrow$ $\max\ 3x_1 + 5x_2$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 300$$
$$x_i \geq 0\ \forall i$$

Οι 3 & 4 στήλες δίνουν τον μοναδιαίο (2x2) πίνακα.

άρα η αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ. $\underline{x}_0 = (0,0,200,300)'$

			3	5	0	0			
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	θ		
P_3	0	200	1	1	1	0	$\frac{200}{1}=200$	Γ_1	
P_4	0	300	1	$\boxed{2}$	0	1	$\frac{300}{2}=150$	Γ_2	
	z	0	-3	-5	0	0		Γ_3	
P_3	0	50	$\boxed{1/2}$	0	1	-1/2	$\frac{50}{1/2}=100$	Γ_1'	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2'$
P_2	5	150	1/2	1	0	1/2	$\frac{150}{1/2}=300$	Γ_2'	$\Gamma_2' = \Gamma_2/2$
	z	750	-1/2	0	0	5/2		Γ_3'	$\Gamma_3' = \Gamma_3 + 5\Gamma_2'$
P_1	3	100	1	0	2	-1		Γ_1''	$\Gamma_1'' = 2\Gamma_1'$
P_2	5	100	0	1	-1	1		Γ_2''	$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \Gamma_1''/2$
	z	800	0	0	1	2		Γ_3''	$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \Gamma_1''/2$

όλα τα $z_j - c_j \geq 0$ άρα η άριστη λύση είναι $(100,100,0,0)$

& $z = 800$

Άσκηση 16η

Να λυθεί το π.γ.π. $\min\ 2x_1 - 4x_2$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
4x_1 + 6x_2 - x_4 &= 6. \\
x_i \geq 0 \ \forall i
\end{aligned}
$$

Λύση

Σε κανονική μορφή $\Rightarrow$ $-\max(-2x_1 + 4x_2)$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
4x_1 + 6x_2 - x_4 &= 6. \\
x_i \geq 0 \ \forall i
\end{aligned}
$$

Δεν εμφανίζεται ο μοναδιαίος 2x2 πίνακας άρα βάζουμε μια τεχνητή μεταβλητή x_5 με συντελεστή $M \ll 0$

$\Rightarrow$ $-\max(-2x_1 + 4x_2 + Mx_5)$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
4x_1 + 6x_2 - x_4 + x_5 &= 6 \\
x_i \geq 0 \ \forall i.
\end{aligned}
$$

άρα έχω στην 3η & 5η στήλη το μοναδιαίο που μου δίνει αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ. $x_0 = (0,0,4,0,6)$

			-2	4	0	0	M			
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ		
P_3	0	4	4	1	1	0	0	$\frac{4}{1}=4$	Γ_1	
P_5	M	6	4	$\boxed{6}$	0	-1	1	$\frac{6}{6}=1$	Γ_2	
	z	6M	4M+2	6M−4	0	$-M$	0	$\frac{3}{1/6}=18$	Γ_3	
P_3	0	3	10/3	0	1	$\boxed{1/6}$	$-1/6$	–	Γ_1'	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2'$
P_2	4	1	2/3	1	0	$-1/6$	1/6		Γ_2'	$\Gamma_2' = \Gamma_2/6$
	z	4	14/3	0	0	$-2/3$	$-M+2/3$		Γ_3'	$\Gamma_3' = \Gamma_3 - (6M-4)\Gamma_2'$
P_4	0	18	20	0	6	1	-1		Γ_1''	$\Gamma_1'' = 6\Gamma_1'$
P_2	4	4	4	1	1	0	0		Γ_2''	$\Gamma_2'' = \Gamma_2' + \frac{1}{6}\Gamma_1''$
	z	16	18	0	4	0	$-M$		Γ_3''	$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \frac{2}{3}\Gamma_1''$

$z_j - c_j \geq 0 \ \forall j$ άρα η άριστη λύση είναι $(0,4,0,18)$ και $Z=-16$

Άσκηση 17η

Να λυθεί το π.γ.π. $\max -4x_1+6x_2$

$$x_1+3x_2 \geq 3$$
$$-2x_1+3x_2 \leq 6$$
$$x_1+x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση

Κανονική μορφή: $\max -4x_1+6x_2$

$$x_1+3x_2-x_3 = 3$$
$$-2x_1+3x_2+x_4 = 6$$
$$x_1+x_2+x_5 = 3$$
$$x_i \geq 0 \ \forall i$$

δεν εμφανίζεται ο μοναδιαίος (3x3) άρα βάζω τεχνητή μεταβλητή x_6 με συντ. $M<0$

$\Rightarrow \max -4x_1+6x_2+Mx_6$

$$x_1+3x_2-x_3+x_6 = 3$$
$$-2x_1+3x_2+x_4 = 6$$
$$x_1+x_2+x_5 = 3$$
$$x_i \geq 0 \ \forall i$$

άρα μια αρχική μη τετρ. β.ε.λ είναι η $\underline{x}_0=(0,0,0,6,3,3)$

			-4	6	0	0	0	M			
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ		
P_6	M	3	1	$\boxed{3}$	-1	0	0	1	$\frac{3}{3}=1$	Γ_1	
P_4	0	6	-2	3	0	1	0	0	$\frac{6}{3}=2$	Γ_2	
P_5	0	3	1	1	0	0	1	0	$\frac{3}{1}=3$	Γ_3	
	z	3M	M+4	3M-6	-M	0	0	0		Γ_4	
P_2	6	1	1/3	1	-1/3	0	0	1/3	–	Γ_1'	$\Gamma_1'=\Gamma_1/3$
P_4	0	3	-3	0	$\boxed{1}$	1	0	-1	$\frac{3}{1}=3$	Γ_2'	$\Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma_1'$
P_6	0	2	2/3	0	1/3	0	1	-1/3	$\frac{2}{1/3}=6$	Γ_3'	$\Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma_1'$
	z	6	6	0	-2	0	0	-M+2		Γ_4'	$\Gamma_4'=\Gamma_4-(3M-6)\Gamma_1'$
P_2	6	2	-2/3	1	0	1/3	0	0		Γ_1''	$\Gamma_1''=\Gamma_1'+\Gamma_2''/3$
P_3	0	3	-3	0	1	1	0	-1		Γ_2''	$\Gamma_2''=\Gamma_2'$
P_5	0	1	$\boxed{5/3}$	0	0	-1/3	1	0		Γ_3''	$\Gamma_3''=\Gamma_3'-\Gamma_2''/3$
	z	12	0	0	0	2	0	-M		Γ_4''	$\Gamma_4''=\Gamma_4'+2\Gamma_2''$

$z_j-c_j \geq 0 \ \forall j$ άρα άριστη λύση η $(0,2,3,0,1)$ με $z=12$

όμως στη πρώτη στήλη (μη βασική) έχουμε $z_1-c_1=0$ άρα υπάρχει κι άλλη λύση

βάζω λοιπόν την P_1 στη θέση της P_5 στη βάση κι έχω νέο tableu

			-4	6	0	0	0	M		
B	c_b	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		
P_2	6	12/5	0	1	0	1/5	2/5	0	Γ_1'''	$\Gamma_1''' = \Gamma_1'' + \frac{2}{3}\Gamma_3'''$
P_3	0	24/5	0	0	1	2/5	9/5	-1	Γ_2'''	$\Gamma_2''' = \Gamma_2'' + 3\Gamma_3'''$
P_1	-4	3/5	1	0	0	-1/5	3/5	0	Γ_3'''	$\Gamma_3''' = \frac{3}{5}\Gamma_3''$
	z	12	0	0	0	2	0	-M	Γ_4'''	$\Gamma_4''' = \Gamma_4''$

άρα άλλη μια άριστη λύση $\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{24}{5}, 0, 0\right)$ με $z = 12$

άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις της μορφής

$$\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$$

$$= \lambda(0,2,3,0,1) + (1-\lambda)\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{24}{5}, 0, 0\right)$$

$$= \left((1-\lambda)\frac{3}{5},\ 2\lambda + (1-\lambda)\frac{12}{5},\ 3\lambda + (1-\lambda)\cdot\frac{24}{5},\ 0,\ \lambda\right) \quad \text{με } 0 \le \lambda \le 1$$

Άσκηση 18η

Δίνεται το (Π) π.γ.π. $\min\ 2x_1 - 4x_2$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 + 6x_2 - x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0\ \forall i$$

& το αρχικό & τελικό tableau του.

			-2	4	0	0	M
$\underline{B}$	c_b	$\underline{b}$	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$
$\underline{P}_3$	0	4	4	1	1	0	0
$\underline{P}_5$	M	6	4	6	0	-1	1
	z	6M	4M+2	6M-4	0	-M	0
			⋮				
$\underline{P}_4$	0	18	20	0	6	1	-1
$\underline{P}_2$	4	4	4	1	1	0	0
	z	16	18	0	4	0	-M

Να βρεθεί το δυϊκό & η άριστη λύση του.

Λύση

(Δ) $\max\ 4w_1 + 6w_2$

$$4w_1 + 4w_2 \leq 2$$
$$w_1 + 6w_2 \leq -4$$
$$w_1 \leq 0$$
$$-w_2 \leq 0$$
$$w_1, w_2 \in \mathbb{R}$$

η λύση το (Π) είναι $\underline{x}^* = (0,4,0,18)$

& η λύση του (Δ) δίνεται από

$$w_1^* = (z_3 - c_3) + c_3 = 4 + 0 = 4$$
$$w_2^* = (z_5 - c_5) + c_5 = -M + M = 0$$

άρα $\underline{w}^* = (4,0)$

διότι ο μοναδιαίος σχηματίζεται στο 1ο tableau από τις στήλες 3 & 5 αντίστοιχα. άρα πάω στις αντίστοιχες διαφορές του τελικού tableau & βρίσκω το $\underline{w}^*$