Άσκηση 19η

Δίνεται (Π) $\max -4x_1+6x_2$

$$x_1+3x_2 \geq 3$$
$$-2x_1+3x_2 \leq 6$$
$$x_1+x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

& το αρχικό & τελικό του tableu.

			-4	6	0	0	0	M
B	C_b	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_6	M	3	1	3	-1	0	0	1
P_4	0	6	-2	3	0	1	0	0
P_5	0	3	1	1	0	0	1	0
	Z	3M	M+4	3M-6	-M	0	0	0
			⋮	⋮				
P_2	6	2	-2/3	1	0	1/3	0	0
P_3	0	3	-3	0	1	1	0	-1
P_5	0	1	5/3	0	0	-1/3	1	0
	Z	12	0	0	0	2	0	-M

Να βρεθεί το δυϊκό του και η λύση του.

Λύση

(Δ) $\min\ 3w_1+6w_2+3w_3$

$$w_1-2w_2+w_3 \geq -4$$
$$3w_1+3w_2+w_3 \geq 6$$
$$w_1 \leq 0,\ w_2, w_3 \geq 0$$

το (Π) έχει λύση $\underline{x}^* = (0,2,3,0,1)$ με $Z=12$.

το (Δ) έχει λύση

$$w_1^* = (Z_6-C_6)+C_6 = -M+M=0$$
$$w_2^* = (Z_4-C_4)+C_4 = 2+0=2$$
$$w_3^* = (Z_5-C_5)+C_5 = 0+0=0$$

άρα $\underline{w}^* = (0,2,0)$ & $Z=12$

γιατί ο μοναδιαίος 3x3 στο αρχικό tableu δημιουργείται από τις στήλες 6, 4, 5 αντίστοιχα άρα πάω στις αντίστοιχες διαφορές του τελικού tableu & βρίσκω το $\underline{w}^*$

Άσκηση 20η

Δίνεται το πγπ (Π) $\max (-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$
$$2x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_2 + 2x_4 \leq 8$$
$$x_i \geq 0$$

με λύση $\underline{x}^* = (2,0,0,4)$ & $z = -2$

Να βρεθεί το (Δ) & η λύση του.

Λύση

Σε ημικανονική μορφή το (Π) : $\max -x_1 + 2x_2 - 3x_3$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \leq -10$$
$$2x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_2 + 2x_4 \leq 8$$
$$x_i \geq 0$$

άρα το (Δ) => $\min 10w_1 - 10w_2 + w_3 + 8w_4$

$$w_1 - w_2 \geq -1$$
$$-w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4 \geq 2$$
$$w_1 - w_2 - w_3 \geq -3$$
$$2w_1 - 2w_2 + 2w_4 \geq 0$$
$$w_i \geq 0.$$

όμως $x_j^* (a_{1j} w_1^* + a_{2j} w_2^* + a_{3j} w_3^* + a_{4j} w_4^* - c_j) = 0$

και $\left.\begin{matrix} x_1^* \neq 0 \\ x_4^* \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} w_1^* - w_2^* = -1 \\ 2w_1^* - 2w_2^* + 2w_4^* = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} w_4^* = 1 \\ \text{\& } w_1^* - w_2^* = -1 \end{matrix}$

Επίσης η $\underline{x}^*$ δεν κάνει ισότητα τον 3ο περιορισμό του (Π)

άρα από $w_i^* (a_{i1} x_1^* + a_{i2} x_2^* + a_{i3} x_3^* + a_{i4} x_4^*) = 0$

$$\Rightarrow w_3^* = 0.$$

Θέτω $w_1^* = k \geq 0$. => $w_2^* = k+1 \geq 0$ άρα η λύση είναι $(k, k+1, 0, 1)$, $k \geq 0$

με $z = 10k - 10(k+1) + 0 + 8 \cdot 1 =$
$= -10 + 8 = -2$

Άσκηση 21η

Δίνεται το (Π) $\max -x_1 + 2x_2$ με λύση $\underline{x}^* = (3/5, 12/5)$ και $z = 21/5$

$$6x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να βρεθεί το δυϊκό του και η λύση του.

Λύση

Το (Π) είναι σε ημικανονική άρα (Δ) $\min 3w_1 + 6w_2 + 3w_3$

$$6w_1 - 2w_2 + w_3 \geq -1$$
$$-2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 2$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

γνωρίζουμε ότι $x_j^* (\alpha_{1j} w_1^* + \alpha_{2j} w_2^* + \alpha_{3j} w_3^* - c_j) = 0$

και $\left.\begin{matrix} x_1^* \neq 0 \\ x_2^* \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6w_1^* - 2w_2^* + w_3^* - (-1) = 0 \\ -2w_1^* + 3w_2^* + w_3^* - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ ①

όμως $w_i^* (\alpha_{i1} x_1^* + \alpha_{i2} x_2^* - b_j) = 0$

και η $\underline{x}^*$ δεν κάνει ισότητα τον 1ο περιορισμό του (Π)

άρα $w_1^* = 0$.

έτσι ① $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} -2w_2^* + w_3^* = -1 \\ 3w_2^* + w_3^* = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} w_2^* = 3/5 \\ w_3^* = 1/5 \end{matrix}$

άρα $\underline{w}^* = (0, 3/5, 1/5)$ και $z = 21/5$

Άσκηση 22η

Να λυθεί το π.γ.π. χωρίς simplex.

$$\max \; x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4$$
$$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 \leq 20$$
$$-x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 12$$
$$x_i \geq 0 \;\; \forall i$$

Λύση

Είναι σε ημικανονική μορφή άρα το (Δ)

$$\min \; 20w_1 + 12w_2$$
$$2w_1 - w_2 \geq 1$$
$$2w_1 + w_2 \geq 1$$
$$-5w_1 + 4w_2 \geq -3$$
$$5w_1 - 2w_2 \geq -2$$
$$w_i \geq 0 \;\; \forall i$$

Θα το λύσουμε γραφικά

(ε_1) : $2w_1 - w_2 = 1$

w_1	0	1/2
w_2	-1	0

(ε_2) : $2w_1 + w_2 = 1$

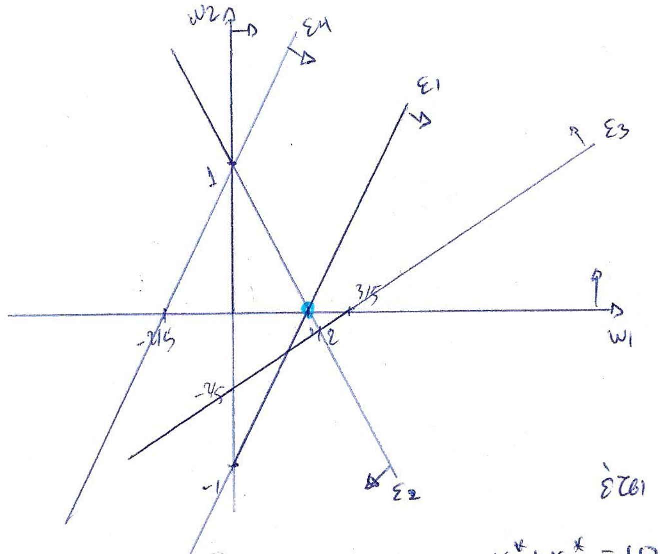
w_1	0	1/2
w_2	1	0

(ε_3) : $-5w_1 + 4w_2 = -3$

w_1	0	3/5
w_2	-3/4	0

(ε_4) : $5w_1 - 2w_2 = -2$

w_1	0	-2/5
w_2	1	0



άρα λύση $\underline{w}^* = (1/2, 0)$ με $z = 20 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 0 = 10$

οπότε $w_i^*(\alpha_{i1}x_1^* + \alpha_{i2}x_2^* + \alpha_{i3}x_3^* + \alpha_{i4}x_4^* - b_i) = 0$

& $w_1^* \neq 0 \Rightarrow 2x_1^* + 2x_2^* - 5x_3^* + 5x_4^* = 20$ (1)

Επίσης $x_j^*(\alpha_{j1}w_1^* + \alpha_{j2}w_2^* - c_j) = 0$

& η $\underline{w}^*$ δεν κάνει ισότητες τους περ. 3, 4 του (Δ)

άρα $x_3^* = x_4^* = 0$

έτσι η (1) $\Rightarrow x_1^* + x_2^* = 10$

άρα $\left.\begin{array}{l} x_1^* + x_2^* = 10 \\ -x_1^* + x_2^* \leq 12 \\ x_1^*, x_2^* \geq 0 \end{array}\right\}$ είναι το ευθ. τμήμα που ενώνει τα $(10,0)$ & $(0,10)$

δηλ. $(x_1^*, x_2^*) = \lambda(10,0) + (1-\lambda)\cdot(0,10) = (10\lambda, (1-\lambda)10)$, $0 \leq \lambda \leq 1$

άρα $\underline{x}^* = (10\lambda, (1-\lambda)10, 0, 0)$ με $z = 10\lambda + (1-\lambda)\cdot 10 + 3\cdot 0 - 2\cdot 0 = 10$

Άσκηση 23η

Μια εταιρεία μπορεί να στείλει 200 αυτοκίνητα με φορτηγό και 600 με το τρένο. Το κόστος & η ζήτηση των αυτοκινήτων δίνονται στον πίνακα

	CHICAGO (B_1)	CLEVELAND (B_2)	WASHINGTON (B_3)	PHILADELPHIA (B_4)
ΦΟΡΤΗΓΟ (A_1)	30	20	50	60
ΤΡΕΝΟ (A_2)	45	30	75	90
ΖΗΤΗΣΗ	300	100	250	150

Να βρεθεί τρόπος μεταφοράς που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Λύση

Θα βρούμε μια αρχική λύση με την μέθοδο ελαχίστου στοιχείου.

Το πρόβλημα είναι ισορροπημένο $\sum_{i=1}^{2} A_i = \sum_{j=1}^{4} B_j = 800$

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	30 / 100	20 / 100	50 / 0	60 / 0	~~200~~ ~~100~~ 0
A_2	45 / 200	30 / 0	75 / 250	90 / 150	~~600~~ ~~400~~ ~~150~~ 0
	~~300~~ ~~200~~ 0	~~100~~ 0	~~250~~ 0	~~150~~ 0	

→ αρχική β.ε. λύση με κόστος

$R_0 = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 100 + 45 \cdot 200 + 75 \cdot 250 + 90 \cdot 150 = 46.250$

Θα πάμε να ελέγξουμε αν είναι βέλτιστη λύση

u \ v	30	20	60	75
0	30 / 100 −	20 / 100	(10) 50 / 0	(15) 60 / 0 +
15	45 / 200 +	(5) 30 / 0	75 / 250	90 / 150 −

$\theta_0 = \min\{100, 150\} = 100$

άρα υπάρχει καλύτερη πάμε να ελέγξουμε αν είναι βέλτιστη (αφού πριν βρήκα $\delta_{ij} > 0$)

u \ v	15	20	45	60
0	(−15) 30 / 0	20 / 100 −	(−5) 50 / 0	60 / 100 +
30	45 / 300	(20) 30 / 0 +	75 / 250	90 / 50 −

$\exists\, \delta_{ij} > 0$ άρα όχι βέλτιστη

$\theta_1 = \min\{100, 50\} = 50$

& $R_1 = 100 \cdot 20 + 100 \cdot 60 + 300 \cdot 45 + 250 \cdot 75 + 50 \cdot 90 = 44.750$

u \ v	35	20	65	60
0	5) 30 0	20 − 50	15) 20 + 0	60 150
10	45 300	30 50 +	75 250 −	-20) 90 0

∃ $\delta_{ij}>0$ άρα όχι βέλτιστη

$\theta_2=\min\{50,250\}=50$

& $R_2 = 50\cdot 20 + 150\cdot 60 + 300\cdot 45 + 50\cdot 30 + 250\cdot 75 =$
$= 43.750$

u \ v	20	5	50	60
0	-10) 30 0	-15) 20 0	50 50	60 150
25	45 300	30 100	75 200	-5) 90 0

όλα τα $\delta_{ij}\le 0$ άρα βέλτιστη λύση.

με $R_3 = 50\cdot 50 + 150\cdot 60 + 300\cdot 45 +$
$+ 100\cdot 30 + 200\cdot 75 = 43.000$

Άσκηση 24η

Κάθε μήνα από ένα περιοδικό μπορούν να εκδοθούν μέχρι 5.000 αντίγραφα από κάθε εκδοτήριο. Los Angeles κ New York. Τα περιοδικά μοιράζονται σε 3 περιοχές CHICAGO, SEATTLE κ WASHINGTON. Για αυτό το μήνα έχουν παραγγείλει 5.000, 2000 κ 1500 αντίστοιχα. Να βρεθεί τρόπος μεταφοράς που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Το κόστος μεταφοράς. (x 0,1 \$/magazine) δίνεται στον πίνακα.

	CHICAGO (B_1)	SEATTLE (B_2)	WASHINGTON (B_3)
Los Angeles (A_1)	7	5	10
New York (A_2)	3	11	4

Λύση

Έχουμε μη ισορ. πρόβλημα διότι $\sum_{i=1}^{2} A_i = 10.000 \neq 8.500 = \sum_{j=1}^{3} B_j$

άρα προσθέτουμε ένα ακόμη προορισμό B_4 με μηδενικό κόστος μεταφοράς. και ζήτηση 10.000 − 8500 = = 1500

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 / 0	5 / 2000	10 / 1500	0 / 1500	~~5.000~~ ~~3.500~~ ~~1500~~ 0
A_2	3 / 5000	11 / 0	4 / 0	0 / 0	~~5.000~~ 0
	~~5.000~~ 0	~~2000~~ 0	~~1500~~ 0	~~1500~~ 0	

Η αρχική λύση είναι εκφυλισμένη γιατί δεν έχει $m+n-1 = 5$ θετικά στοιχεία

Βάζω όπου $A_i = 5.000 + ε$ κ $B_4 = 1500 + 2ε$, $ε > 0$ για να λύσω με την μέθοδο διαταραχής.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 / 0	5 / 2000	10 / 1500−ε	0 / 1500+2ε	~~5.000+ε~~ ~~3500−ε~~ ~~1500−ε~~ 0
A_2	3 / 5000	11 / 0	4 / ε	0 / 0	~~5000+ε~~ ~~ε~~ 0
	5.000 0	2000 0	1500 ~~1500−ε~~ 0	~~1500+2ε~~ 0	

αυτή είναι μη εκφυλισμένη

με $R_0 = 2.000\cdot5 + (1500-ε)\cdot10 + (1500+2ε)\cdot0 + 5000\cdot3 + ε\cdot4 = 40.000 - 10ε$

Θα δούμε αν η λύση είναι άριστη

u \ v	9	5	10	0
0	7 / 0 (2) +	5 / 2000	10 / 1500−ε −	0 / 1500+2ε
−6	3 / 5000 −	11 / 0 (−12)	4 / ε +	0 / 0 (−6)

αφού υπάρχει $δ_{ij} > 0$ δεν είναι βέλτιστη

$θ_0 = \min\{1500-ε, 5000\} = 1500 - ε$

u \ v	7	5	8	0
0	7 $1500-\varepsilon$	5 2000	(−2) 10 0	0 $1500+2\varepsilon$
−4	3 $3500+\varepsilon$	(−10) 11 0	4 1500	(−4) 0 0

αφού όλα τα $\delta_{ij} \leq 0$ είναι βέλτιστη για $\varepsilon=0$

& $R_1 = (1500-\varepsilon)\cdot 7 + 2000\cdot 5 + (1500+2\varepsilon)\cdot 0 + (3500+\varepsilon)\cdot 3 + 1500\cdot 4 =$

$= 37.000 - 4\varepsilon$

για $\varepsilon=0 \Rightarrow R_1 = 37.000$