Άσκηση 25η

Ένας μηχανολόγος μηχανικός κάνει μελέτη για την ενεργειακή κατανάλωση.

Διαθέτει 3 πηγές ενέργειας
- → φωτοβ.
- → ηλεκ. γεν.
- → καυστ. πετρ.

Οι ημερήσιες ανάγκες του κτιρίου είναι
- → 40 μον. για θερμ. χώρου
- → 30 μον για θερμ. νερού
- → 40 μον για φωτ.

Η οροφή επιτρέπει φωτοβ. με δυναμικότητα 50 μον/ημ.

Η δυναμικότητα της ηλεκ. γεννήτ. είναι 80 μον/ημ. & του καυστήρα 80 μον/ημ.

Το κόστος σε €/μον.

	Θερ. νερού B_1	Θερ. χώρου B_2	Φωτ. B_3
Φωτ. A_1	10	20	15
Ηλεκ. A_2	16	15	20
Καυσ. A_3	8	7	25

Η επιπλέον ενέργεια που παράγεται από τα φωτοβ. και δεν καταναλώνεται μπορεί να διοχετευθεί σε διπλανό κτίριο με κέρδος 5 €/μον.

Να βρεθεί η κατανομή της ενεργειακής κατανάλωσης από τις διάφορες πηγές που ελαχιστοποιεί το καθαρό συνολικό κόστος.

Λύση

$\sum_{i=1}^{3} A_i = 210$ μον/ημ.

$\sum_{i=1}^{3} B_i = 110$ μον/ημ.

} άρα μη ισορ., βάζουμε λοιπόν έναν B_4 προορισμό με κόστος.

$A_1 \to B_4$ (-5)

$A_2 \to B_4$ (0)

$A_3 \to B_4$ (0).

& ζήτηση $210-110 = 100$

Θα βρούμε μια αρχική λύση

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 / 0	20 / 0	15 / 0	-5 / 50	~~50~~ 0
A_2	16 / 0	15 / 0	20 / 30	0 / 50	~~80~~ ~~30~~ 0
A_3	8 / 30	7 / 40	25 / 10	0 / 0	~~80~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
	~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~40~~ ~~10~~ 0	~~100~~ ~~50~~ 0	

$R_0 = 30\cdot 8 + 40\cdot 7 + 30\cdot 20 + 10\cdot 25 + 50\cdot(-5) + 50\cdot 0 =$
$= 1120$

Θα ελέγξουμε αν είναι βέλτιστη λύση

u \ v	−2	−3	15	−5
0	(−12) 10 / 0	(−23) 20 / 0	(0) 15 / 0	−5 / 50
5	(−13) 16 / 0	(−13) 15 / 0	20 / 30 +	0 / 50 −
10	8 / 30	7 / 40	25 / 10 −	(5) 0 / 0 +

$\exists\, \delta_{ij} > 0$ άρα όχι βέλτιστη

$\theta_0 = \min\{10, 50\} = 10$

u \ v	3	2	15	−5
0	(−7) 10 / 0	(−18) 20 / 0	(0) 15 / 0 +	−5 / 50 −
5	(−8) 16 / 0	(−8) 15 / 0	20 / 40 −	0 / 40 +
5	8 / 30	7 / 40	(−5) 25 / 0	0 / 10

όλα τα $\delta_{ij} \leq 0$ άρα βέλτιστη.

με $R_1 = 50\cdot(-5) + 40\cdot 20 + 40\cdot 0 + 30\cdot 8 + 40\cdot 7 + 10\cdot 0 =$
$= 1070$

όμως υπάρχει $\delta_{ij} = 0$ άρα υπάρχει κ άλλη βέλτιστη.
άρα $\theta_1 = \min\{40, 50\} = 40$

u \ v	3	2	15	−5
0	(−7) 10 / 0	(−18) 20 / 0	15 / 40	−5 / 10
5	(−8) 10 / 0	(−8) 15 / 0	(0) 20 / 0	0 / 80
5	8 / 30	7 / 40	(−5) 25 / 0	0 / 10

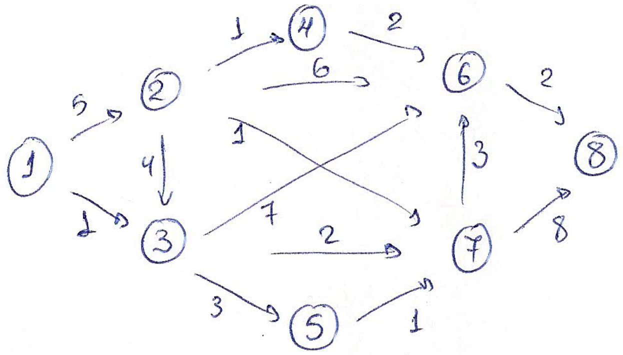
είναι $\delta_{ij} \leq 0$ άρα νέα βέλτιστη

με $R_1' = 40\cdot 15 + 10\cdot(-5) + 80\cdot 0 + 30\cdot 8 +$
$+ 40\cdot 7 + 10\cdot 0 = 1070$

Άσκηση 26η

Ένα φορτηγό θέλει να μεταφέρει φορτίο από το 1 στο 8 αλλά το βάρος του φορτίου εξαρτάται από το βάρος των καυσίμων. Να βρεθεί η διαδρομή που μεγιστοποιεί το μεταφερόμενο φορτίο.

Στο σχήμα υπάρχουν τα απαιτούμενα λίτρα βενζίνης.



Λύση

α' τρόπος. Έστω $v(x)$ = ελάχιστα καύσιμα από τον x κ μετά

τότε $\begin{cases} v(x) = \min \{c(x,y) + v(y)\} \\ v(8) = 0 \end{cases}$

$v(8) = 0$

$v(7) = \min\{8 + v(8), 3 + v(6)\} = \min\{8, 5\} = 5$ — $\boxed{a^*(7) = 6}$

$v(6) = 2 + v(8) = 2$ — $\boxed{a^*(6) = 8}$

$v(5) = 1 + v(7) = 1 + 5 = 6$ — $a^*(5) = 7$

$v(4) = 2 + v(6) = 2 + 2 = 4$ — $a^*(4) = 6$

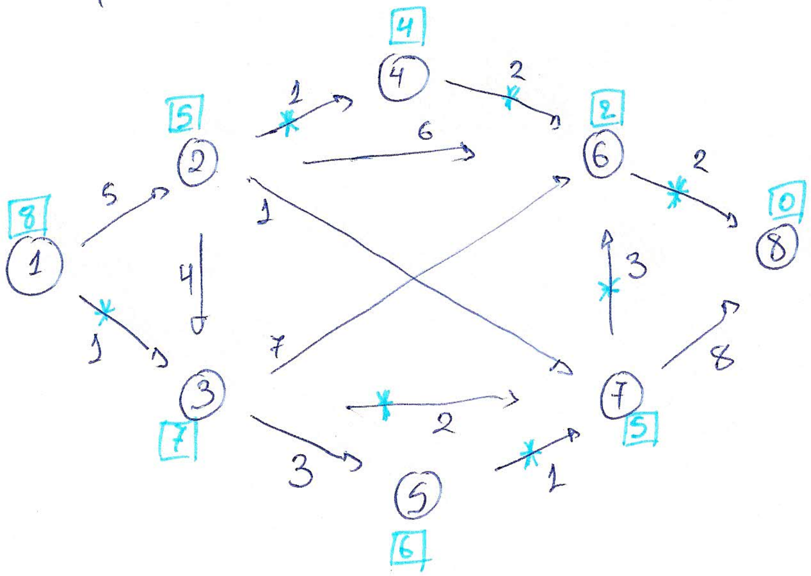
$v(3) = \min\{3 + v(5), 2 + v(7), 7 + v(6)\} = 7$ — $\boxed{a^*(3) = 7}$

$v(2) = \min\{1 + v(4), 6 + v(6), 1 + v(7), 4 + v(3)\} = 5$ — $a^*(2) = 4$

$v(1) = \min\{1 + v(3), 5 + v(2)\} = 8$ — $\boxed{a^*(1) = 3}$

άρα $1 \to 3 \to 7 \to 6 \to 8$ κ ελαχ. καταν. 8

β' τρόπος



$1 \to 3 \to 7 \to 6 \to 8$ με ελαχ. κατανάλωση 8.

Άσκηση 27η

Μια βιομηχανία μπορεί να παράγει 4 είδη προϊόντων $\Pi_1, \ldots, \Pi_4$. Η βιομηχανία έχει 100 εργάτες διαθέσιμους & θέλει να αποφασίσει για την μηνιαία παραγωγή της.

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
Απαιτούμενοι Εργ.	20	15	35	50
Μηνιαίο κέρδος σε χιλ.€	12	10	12	20

Κάθε προϊόν μπορεί να επιλεχθεί για μηνιαία παραγωγή μόνο μια φορά. Να βρεθεί βέλτιστη πολιτική παραγωγής, δηλαδή αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση

Θεωρούμε ότι αποφασίζουμε διαδοχικά αν θα παράγουμε τα $\Pi_1, \ldots, \Pi_4$ άρα έχουμε χρονικό ορίζοντα $N=4$

αποφάσεις : $\alpha = \begin{cases} 0 : \text{δεν παράγω} \\ 1 : \text{παράγω} \end{cases}$

καταστάσεις : (t,x) δηλαδή απομένουν x εργάτες για τα προϊόντα $\Pi_t, \Pi_{t+1}, \ldots, \Pi_4$

Δυναμική συστήματος : $x_{t+1} = \begin{cases} x_t & \text{αν } \alpha=0 \\ x_t - k_t & \text{αν } \alpha=1, \; k_t \le x_t \end{cases}$

όπου k_t εργάτες που απαιτούνται στο προϊόν Π_t.

Δομή κέρδους : $c_t(x,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha=0 \\ A_t, & \text{αν } \alpha=1 \end{cases}$

όπου A_t το κέρδος αν επιλέξω το προϊόν Π_t

Εξισώσεις βελτιστοποίησης : $v(t,x) = \max\limits_{\alpha} \{ c_t(x,\alpha) + v(t+1, x_{t+1}) \}$.

$$\begin{cases} v(t,x) = \max\{0 + v(t+1,x), A_t + v(t+1, x-k_t)\}, & t=1,\ldots,4, \; x \ge k_t \\ v(t,x) = v(t+1,x) \quad \text{αν } t=1,\ldots,4, & x < k_t \\ v(5,x) = 0, & x = 0,1,2,\ldots,100 \end{cases}$$

για $t=1$ κ $x=100$

$v(1,100) = \max\{0 + v(2,100),\ 12 + v(2,100-20)\} =$

$= \max\{v(2,100),\ 12 + v(2,80)\} =$

$= \max\{42, 42\} = 42$

$\alpha^*(1) = 0 \to (2,100)$

ή $\alpha^*(1) = 1 \to (2,80)$

για $t=2$ κ $x=100$

$v(2,100) = \max\{0 + v(3,100),\ 10 + v(3,100-15)\}$

$= \max\{v(3,100),\ 10 + v(3,85)\}$

$= \max\{32, 42\} = 42$

$\alpha^*(2) = 1 \to (3,85)$

κ $x=80$

$v(2,80) = \max\{0 + v(3,80),\ 10 + v(3,80-15)\} =$

$= \max\{v(3,80),\ 10 + v(3,65)\}$

$= \max\{20, 30\} = 30$

$\alpha^*(2) = 1 \to (3,65)$

για $t=3$ κ $x=100$

$v(3,100) = \max\{0 + v(4,100),\ 12 + v(4,100-35)\}$

$= \max\{v(4,100),\ 12 + v(4,65)\}$

$= \max\{20, 32\} = 32$

κ $x=85$

$v(3,85) = \max\{0 + v(4,85),\ 12 + v(4,85-35)\}$

$= \max\{v(4,85),\ 12 + v(4,50)\}$

$= \max\{20, 32\} = 32$

$\alpha^*(3) = 1 \to (4,50)$

κ $x=80$

$v(3,80) = \max\{0 + v(4,80),\ 12 + v(4,80-35)\}$

$= \max\{v(4,80),\ 12 + v(4,45)\}$

$= \max\{20, 12\} = 20$

κ $x=65$

$v(3,65) = \max\{0 + v(4,65),\ 12 + v(4,65-35)\}$

$= \max\{v(4,65),\ 12 + v(4,30)\}$

$= \max\{20, 12\} = 20$

$\alpha^*(3) = 0 \to (4,65)$

για $t=4$ και $x=100$

$$v(4,100) = \max\{0+v(5,100), 20+v(5,100-50)\}$$
$$= \max\{v(5,100), 20+v(5,50)\}$$
$$= \max\{0, 20\} = 20$$

και $x=85$

$$v(4,85) = \max\{0+v(5,85), 20+v(5,85-50)\}$$
$$= \max\{v(5,85), 20+v(5,35)\}$$
$$= \max\{0, 20\} = 20$$

και $x=80$

$$v(4,80) = \max\{0+v(5,80), 20+v(5,80-50)\}$$
$$= \max\{v(5,80), 20+v(5,30)\}$$
$$= \max\{0, 20\} = 20$$

και $x=65$

$$v(4,65) = \max\{0+v(5,65), 20+v(5,65-50)\}$$
$$= \max\{v(5,65), 20+v(5,15)\}$$
$$= \max\{0, 20\} = 20$$

$\alpha^*(4) = 1 \to (5,15)$

και $x=50$

$$v(4,50) = \max\{0+v(5,50), 20+v(5,50-50)\}$$
$$= \max\{v(5,50), 20+v(5,50)\}$$
$$= \max\{0, 20\} = 20$$

$\alpha^*(4) = 1 \to (5,0)$

και $x=45$

$$v(4,45) = v(5,45) = 0$$

και $x=30$

$$v(4,30) = v(5,30) = 0$$

Τελικά έχουμε δύο λύσεις.

$$(1,100) \xrightarrow{\alpha=0} (2,100) \xrightarrow{\alpha=1} (3,85) \xrightarrow{\alpha=1} (4,50) \xrightarrow{\alpha=1} (5,0)$$

ή

$$(1,100) \xrightarrow{\alpha=1} (2,80) \xrightarrow{\alpha=1} (3,65) \xrightarrow{\alpha=0} (4,65) \xrightarrow{\alpha=1} (5,15)$$

με μέγιστο κέρδος $v(1,100) = \$2$

Άσκηση 28η

Μια εταιρεία κατασκευών χρειάζεται ένα συγκεκριμένο τύπο μηχανήματος για τα επόμενα 5 χρόνια. Αυτή τη στιγμή (αρχή πρώτου έτους) διαθέτει ένα μηχάνημα αυτού του τύπου ηλικίας ενός έτους. Στην αρχή κάθε έτους η εταιρεία μπορεί είτε να κρατήσει το μηχάνημα ή να το πουλήσει και να αγοράσει ένα καινούργιο. Ένα καινούργιο μηχάνημα δεν μπορεί να λειτουργήσει πάνω από 3 χρόνια. Το νέο μηχάνημα κοστίζει 5.000 ευρώ. Τα ετήσια έσοδα από την λειτουργία του μηχανήματος, το ετήσιο κόστος συντήρησης και η αξία μεταπώλησης είναι συνάρτηση της ηλικίας του μηχανήματος όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να βρεθεί η πολιτική συντήρησης-αντικατάστασης του μηχανήματος που μεγιστοποιεί το συνολικό καθαρό κέρδος για την πενταετία.

	Ηλικία Μηχανήματος 0	1	2
Έσοδα	4500	3000	1500
Κόστος Συντήρησης	500	700	1100
Αξία Μεταπώλησης	3000	1800	500

Λύση

Καταστάσεις - αποφάσεις: (t,x) ή X_t → το μηχάνημα έχει ηλικία x στην αρχή της περιόδου t

$$\alpha = \begin{cases} 1 : \text{αντικατάσταση} \\ 2 : \text{συντήρηση} \end{cases}$$ → αποφασίζω στην αρχή κάθε περιόδου

Δυναμική συστήματος: $$X_{t+1} = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \alpha = 1 \\ X_t + 1 & , \text{αν } \alpha = 2 ,\ X_t < 3 . \end{cases}$$

κέρδος: $$R(x,\alpha) = \begin{cases} \mu(x) + \varepsilon(0) - 5000 - c(0) & , \text{αν } \alpha = 1 \\ \varepsilon(x) - c(x) & , \text{αν } \alpha = 2 \end{cases}$$

όπου $\mu(x)$ αξία μεταπώλησης μηχ. ηλικίας x

$c(x)$ κόστος συντήρησης μηχ. όταν στην αρχή της περιόδου έχει ηλ. x.

$\varepsilon(x)$ έσοδα μηχ. όταν στην αρχή της περιόδου έχει ηλ. x.

τερματικό κέρδος: $E(x) = \mu(x)$ όπου $\mu(3) = 0$

Εξ. βελτ.

$$\begin{cases} v(t,x) = \max\{p(x)+E(0)-5000-C(0)+v(t+1,1),\ E(x)-C(x)+v(t+1,x+1)\} & ,\ x<3 \\ & t=1,\dots,5 \\ v(t,x) = p(x)+E(0)-5000-C(0)+v(t+1,1) & ,\ x=3\ ,\ t=1,\dots,5 \\ v(6,x) = p(x) & ,\ x=0,1,2,3 \end{cases}$$

για $t=1$ ϗ $x=1$

$$v(1,1) = \max\{p(1)+E(0)-5000-C(0)+v(2,1),\ E(1)-C(1)+v(2,2)\}$$

$$= \max\{800+v(2,1),\ 2300+v(2,2)\} = \max\{6200, 6400\} = 6400 \qquad \alpha^*(1)=2 \to (2,2)$$

για $t=2$ ϗ $x=1$

$$v(2,1) = \max.\{p(1)+E(0)-5000-C(0)+v(3,1),\ E(1)-C(1)+v(3,2)\}$$

$$= \max\{800+v(3,1),\ 2300+v(3,2)\} = \max\{5400, 5400\} = 5400$$

ϗ $x=2$

$$v(2,2) = \max\{p(2)+E(0)-5000-C(0)+v(3,1),\ E(2)-C(2)+v(3,3)\}$$

$$= \max\{-500+v(3,1),\ 400+v(3,3)\} = \max\{4100, 3000\} = 4100 \qquad \alpha^*(2)=1 \to (3,1)$$

για $t=3$ ϗ $x=1$

$$v(3,1) = \max\{p(1)+E(0)-5000-C(0)+v(4,1),\ E(1)-C(1)+v(4,2)\}$$

$$= \max\{800+v(4,1),\ 2300+v(4,2)\} = \max\{4400, 4600\} = 4600 \qquad \alpha^*(3)=2 \to (4,2)$$

ϗ $x=2$

$$v(3,2) = \max\{p(2)+E(0)-5000-C(0)+v(4,1),\ E(2)-C(2)+v(4,3)\}$$

$$= \max\{-500+v(4,1),\ 400+v(4,3)\} = \max\{3100, 2200\} = 3100$$

ϗ $x=3$

$$v(3,3) = p(3)+E(0)-5000-C(0)+v(4,1) = -1000+v(4,1) = 2600$$

για $t=4$ & $x=1$

$$v(4,1)=\max\{\mu(1)+\Sigma(0)-5000-C(0)+v(5,1)\ ,\ \Sigma(1)-C(1)+v(5,2)\}$$
$$=\max\{+800+v(5,1)\ ,\ 2300+v(5,2)\}=\max\{3600,3600\}=3600$$

& $x=2$

$$v(4,2)=\max\{\mu(2)+\Sigma(0)-5000-C(0)+v(5,1)\ ,\ \Sigma(2)-C(2)+v(5,3)\}$$
$$=\max\{-500+v(5,1)\ ,\ 400+v(5,3)\}=\max\{2300,1200\}=2300 \qquad a^{*}(4)=1 \to (5,1)$$

& $x=3$

$$v(4,3)=\mu(3)+\Sigma(0)-5000-C(0)+v(5,1)=-1000+v(5,1)=1800$$

για $t=5$ & $x=1$

$$v(5,1)=\max\{\mu(1)+\Sigma(0)-5000-C(0)+v(6,1)\ ,\ \Sigma(1)-C(1)+v(6,2)\}$$
$$=\max\{800+\mu(1)\ ,\ 2300+\mu(2)\}=$$
$$=\max\{2600\ ,\ 2800\}=2800 \qquad a^{*}(5)=2 \to (6,2)$$

& $x=2$

$$v(5,2)=\max\{\mu(2)+\Sigma(0)-5000-C(0)+v(6,1)\ ,\ \Sigma(2)-C(2)+v(6,3)\}$$
$$=\max\{-500+\mu(1)\ ,\ 400+\mu(3)\}=$$
$$=\max\{1300\ ,\ 400\}=1300$$

& $x=3$

$$v(5,3)=\mu(3)+\Sigma(0)-5000+C(0)+v(6,1)=-1000+\mu(1)=800$$

Τελικά

$$(1,1)\xrightarrow{\alpha=2}(2,2)\xrightarrow{\alpha=1}(3,1)\xrightarrow{\alpha=2}(4,2)\xrightarrow{\alpha=1}(5,1)\xrightarrow{\alpha=2}(6,2)$$

με κέρδος 6400.

Άσκηση 29η

Σε ένα δήμο που αποτελείται από n διαμερίσματα πρέπει να σχηματιστεί μια επιτροπή από K αντιπροσώπους. Ο αριθμός αντιπροσώπων από κάθε διαμέρισμα πρέπει να είναι ανάλογος του πληθυσμού του διαμερίσματος. Οι πληθυσμοί των διαμερισμάτων είναι M_i, $i=1,\dots,n$ και έστω $M=\sum_{i=1}^{n} M_i$. Σύμφωνα με αυτά τα στοιχεία το διαμέρισμα i πρέπει να έχει $d_i = KM_i/M$ αντιπροσώπους. Όμως γενικά οι αριθμοί d_i, $i=1,\dots,n$ δεν είναι ακέραιοι. Το δημοτικό συμβούλιο έχει αποφασίσει να σχηματίσει την επιτροπή έτσι ώστε το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων των αριθμών ~~των~~ αντιπροσώπων κάθε διαμερίσματος από τις ιδανικές τιμές να είναι ελάχιστο. Συγκεκριμένα αν a_i, $i=1,\dots,n$ είναι ο αριθμός αντιπροσώπων από κάθε διαμέρισμα, ζητείται να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} |a_i - d_i|$.

α) Να οριστεί ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα και να γραφούν οι εξισώσεις βελτιστοποίησης.

β) Να βρεθεί η σύνθεση της επιτροπής που ελαχιστοποιεί την συνολική απόκλιση, όταν $n=3$, $K=3$, $d_1=0{,}4$, $d_2=1{,}4$, $d_3=1{,}2$.

Λύση

α) Καταστάσεις - αποφάσεις : (t,x) ή X_t απομένουν x αντιπρόσωποι όταν βρισκόμαστε στο διαμέρισμα t και απομένουν $t+1,\dots,n$

a_t : πόσους αντιπρ. θα τοποθετήσουμε στο διαμ. t.

Δυναμική συστήματος : $X_{t+1} = X_t - a_t$

Κόστος : $C_t(x,a) = |a_t - d_t|$

Εξ. βελτ.

$$v(t,x) = \min_{a_t} \{ |a_t - d_t| + v(t+1, x-a_t) \}$$

$$v(n+1,x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x=0 \\ \infty & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

β) για $t=1$, $x=3$

$$v(1,3) = \min\{|0-0,4| + v(2,3), |1-0,4| + v(2,2), |2-0,4| + v(2,1), |3-0,4| + v(2,0)\}$$
$$= \min\{0,4 + v(2,3), 0,6 + v(2,2), 1,6 + v(2,1), 2,6 + v(2,0)\} = \min\{1,2, 1,2, 3,2, 5,2\} = 1,2.$$

$a^*(1) = 0 \to (2,3)$

$a^*(1) = 1 \to (2,2)$

για $t=2$, $x=3$

$$v(2,3) = \min\{|0-1,4| + v(3,3), |1-1,4| + v(3,2), |2-1,4| + v(3,1), |3-1,4| + v(3,0)\}$$
$$= \min\{1,4 + v(3,3), 0,4 + v(3,2), 0,6 + v(3,1), 1,6 + v(3,0)\} = \min\{3,2, 1,2, 0,8, 2,8\} = 0,8$$

$a^*(2) = 2 \to (3,1)$

ξ $x=2$

$$v(2,2) = \min\{|0-1,4| + v(3,2), |1-1,4| + v(3,1), |2-1,4| + v(3,0)\}$$
$$= \min\{1,4 + v(3,2), 0,4 + v(3,1), 0,6 + v(3,0)\} = \min\{2,2, 0,6, 1,8\} = 0,6$$

$a^*(2) = 1 \to (3,1)$

ξ $x=1$

$$v(2,1) = \min\{|0-1,4| + v(3,1), |1-1,4| + v(3,0)\}$$
$$= \min\{1,4 + v(3,1), 0,4 + v(3,0)\} = \min\{1,6, 1,8\} = 1,6$$

ξ $x=0$

$$v(2,0) = |0-1,4| + v(3,0) = 1,4 + v(3,0) = 2,6$$

για $t=3$ ξ $x=3$.

$$v(3,3) = \min\{|0-1,2| + v(4,3), |1-1,2| + v(4,2), |2-1,2| + v(4,1), |3-1,2| + v(4,0)\}$$
$$= \min\{1,2 + \infty, 0,2 + \infty, 0,8 + \infty, 1,8 + 0\} = 1,8$$

ξ $x=2$

$$v(3,2) = \min\{|0-1,2| + v(4,2), |1-1,2| + v(4,1), |2-1,2| + v(4,0)\}$$
$$= \min\{1,2 + \infty, 0,2 + \infty, 0,8 + 0\} = 0,8$$

ξ $x=1$

$$v(3,1) = \min\{|0-1,2| + v(4,1), |1-1,2| + v(4,0)\}$$
$$= \min\{1,2 + \infty, 0,2 + 0\} = 0,2$$

$a^*(3) = 1 \to (4,0)$

$a^*(3) = 1 \to (4,0)$

ξ $x=0$

$$v(3,0) = |0-1,2| + v(4,0) = 1,2 + 0 = 1,2.$$

Τελικά

$$\left.\begin{array}{l} (1,3) \xrightarrow{a=0} (2,3) \xrightarrow{a=2} (3,1) \xrightarrow{a=1} (4,0) \\ \text{ή } (1,3) \xrightarrow{a=1} (2,2) \xrightarrow{a=1} (3,1) \xrightarrow{a=1} (4,0) \end{array}\right\} \text{με κόστος } 1,2$$