Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων

19/05/17.

1. Μορφοποίηση του προβλήματος σε ΠΔΠ.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι πρόβλημα κατανομής πόρων, όπου το αγαθό είναι οι 6 εργαζόμενοι και οι δραστηριότητες είναι οι 4 εργασίες. Άρα θεωρούμε τα εξής:

α) Περίοδοι $t = 1, 2, 3, 4, 5$, όπου $t = 5$ η λήξη του ορίζοντα προγραμματισμού.

β) Κατάσταση x_t είναι το πλήθος των εργαζομένων που απομένουν προς απασχόληση για τις επόμενες $t, t+1, \ldots, 5$ περιόδους. Άρα ο χώρος καταστάσεων θα είναι $S = \{0, 1, \ldots, 6\}$

γ) Αποφάσεις: Στην αρχή της περιόδου t αποφασίζουμε

a_t = πόσοι εργαζόμενοι θα απασχοληθούν στην εργασία t,

με $D_t(x) = \begin{cases} \{0, \ldots, 3\}, & \text{αν } x \geq 3 \\ \{0, \ldots, x\}, & \text{αν } x < 3 \end{cases}$ όπου $x_t = x$

γιατί σε κάθε εργασία μπορούν να απασχοληθούν το πολύ 3.

δ) Άμεσο κέρδος: Δίνεται από τη συνάρτηση ωφέλειας

$R(a)$ σύμφωνα με τον πίνακα.

a	0	1	2	3
$R(a)$	0	6	10	13

ε) Δυναμική

$$(t, x) \xrightarrow[R(a)]{a_t = a} (t+1, x-a)$$

στ) Τερματικό κέρδος $\hat{U}(x_{N+1}) = 0$

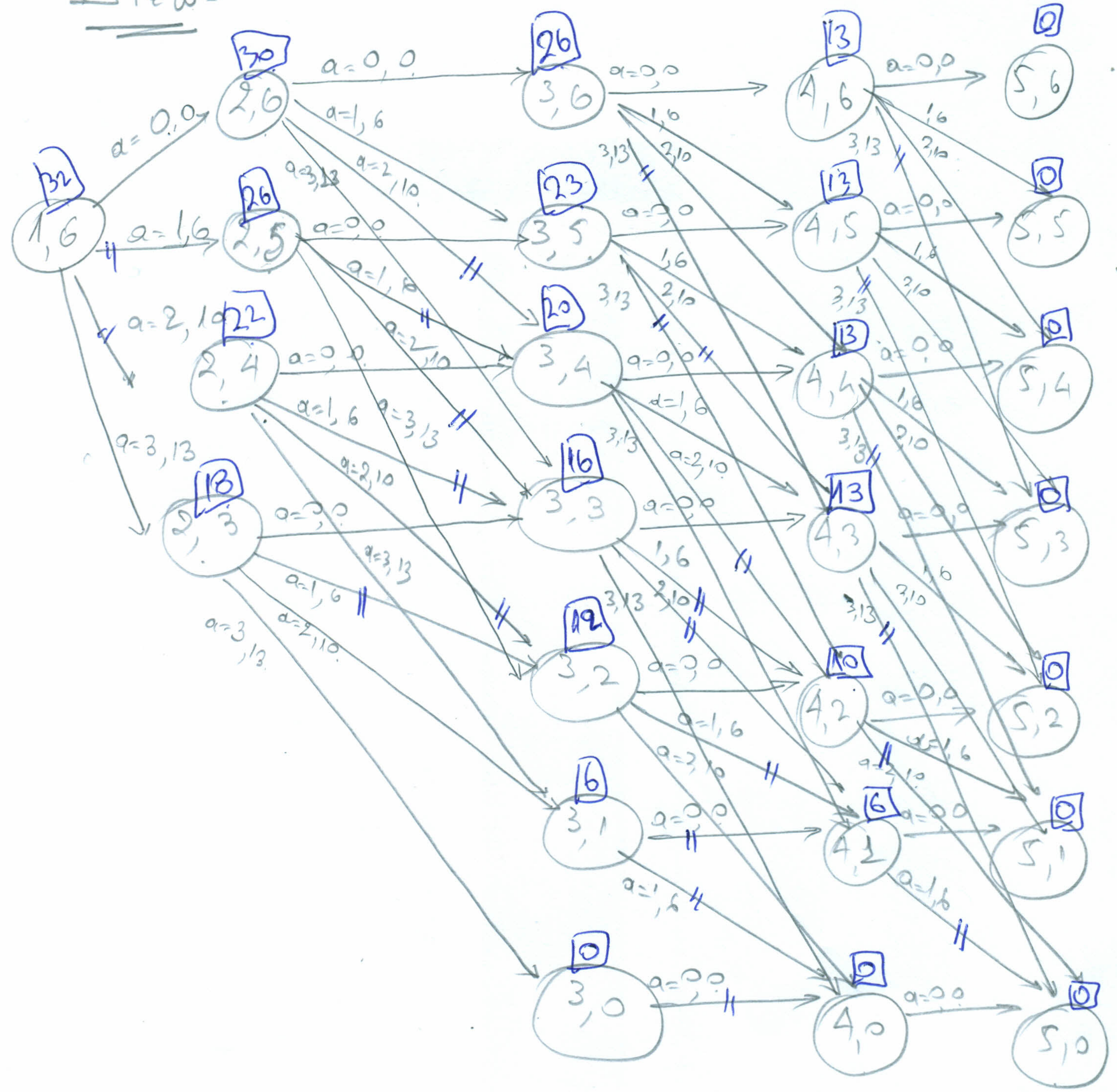
Αν στη λήξη του ορίζοντα κάποιοι εργαζόμενοι δεν απασχοληθούν σε κάποια εργασία τότε δεν επιφέρουν ούτε όφελος ούτε κόστος.

Εξίσωση Βελτιστοποίησης

$$U(t,x) = \max_{a \in D_t(x)} \{ R(a) + U(t+1, x-a) \}, \quad t = 1, \dots 4$$

$$U(5, x) = \hat{U}(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in S$$

Δίκτυο



$v(5,x) = 0 \, , \quad \forall x \in \{0, \dots 6\}$

$v(4,0) = 0 + v(5,0) = 0 \, , \quad a^* = 0$

$v(4,1) = \max\{0 + v(5,1), 6 + v(5,0)\} = 6 \, , \quad a^* = 1.$

$v(4,2) = \max\{0 + v(5,2), 6 + v(5,1), 10 + v(5,0)\} = 10 \quad a^* = 2$

$v(4,3) = \max\{0 + v(5,3), 6 + v(5,2), 10 + v(5,1), 13 + v(5,0)\} = 13, \quad a^* = 3.$

$v(4,x) = 13 \, , \quad x = 4,5,6$ με $a^* = 3$

(4)

$v(3,0) = 0 + v(4,0) = 0 \quad a^* = 0$

$v(3,1) = \max\{0 + v(4,1),\ 6 + v(4,0)\} = 6$ με $a^* = 0$ ή 1

$v(3,2) = \max\{0 + v(4,2),\ 6 + v(4,1),\ 10 + v(4,0)\} = 12 \quad a^* = 1$

$v(3,3) = \max\{0 + v(4,3),\ 6 + v(4,2),\ 10 + v(4,1),\ 13 + v(4,0)\} = 16$ με $a^* = 1$ ή 2

$v(3,4) = \max\{0 + v(4,4),\ 6 + v(4,3),\ 10 + v(4,2),\ 13 + v(4,1)\} = 20$ με $a^* = 2$

$v(3,5) = \max\{0 + v(4,5),\ 6 + v(4,4),\ 10 + v(4,3),\ 13 + v(4,2)\} = 23$

με $a^* = 2$ ή 3.

$v(3,6) = \max\{0 + v(4,6),\ 6 + v(4,5),\ 10 + v(4,4),\ 13 + v(4,3)\} = 26$

με $a^* = 3$

$v(2,3) = \max\{0 + v(3,3),\ 6 + v(3,2),\ 10 + v(3,1),\ 13 + v(3,0)\} = 18$

με $a^* = 1$

$v(2,4) = \max\{0 + v(3,4),\ 6 + v(3,3),\ 10 + v(3,2),\ 13 + v(3,1)\} = 22$

με $a^* = 1$ ή 2

$v(2,5) = \max\{0 + v(3,5),\ 6 + v(3,4),\ 10 + v(3,3),\ 13 + v(3,2)\} = 26$

με $a^* = 1$ ή 2

$v(2,6) = \max\{0 + v(3,6),\ 6 + v(3,5),\ 10 + v(3,4),\ 13 + v(3,3)\} = 30$

με $a^* = 2$.

$v(1,6) = \max\{0 + v(2,6),\ 6 + v(2,5),\ 10 + v(2,4),\ 13 + v(2,3)\} = 32$

με $a^* = 1$ ή 2.

Εδώ η το μέγιστο όφελος είναι 32 και υλοποιείται με 3 βέλτιστες πολιτικές τις

$(1,6) \xrightarrow{a^*=1} (2,5) \xrightarrow{a^*=1} (3,4) \xrightarrow{a^*=2} (4,2) \xrightarrow{a^*=2} (5,0)$

ή

$(1,6) \xrightarrow{a^*=2} (2,4) \xrightarrow{a^*=1} (3,3) \xrightarrow{a^*=1} (4,2) \xrightarrow{a^*=2} (5,0)$

και $(1,6) \xrightarrow{a^*=2} (2,4) \xrightarrow{a^*=1} (3,3) \xrightarrow{a^*=2} (4,1) \xrightarrow{a^*=1} (5,0)$

2. Πρόκειται για εφαρμογή στη διαχείριση παραγωγής-αποθέματος και ζητάμε την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής παραγωγής και διαχείρισης αποθέματος που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για έναν ορίζοντα 5 εβδομάδων, και με ακέραια την παραγωγή και την πώληση των βιβλιοθηκών στην αρχή κάθε εβδομάδας.

Μορφοποίηση σε ΠΔΠ

α) Περίοδοι $t=1,2,3,4,5,6$ εβδομάδες $(N=5)$

Την $t=6$ λήγει ο ορίζοντας του προβλήματος.

β) Κατάσταση x_t = επίπεδο αποθέματος στην αρχή της περιόδου-εβδομάδας t, με χώρο καταστάσεων

$S=\{0,1,2,3\}$ γιατί εδώ η χωρητικότητα της αποθήκης είναι $M=3$ βιβλιοθήκες

γ) Αποφάσεις Έστω a_t = πλήθος βιβλιοθηκών που παράγονται στην αρχή της περιόδου-εβδομάδας t. τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω περιορισμοί:

$a_t \geq 0$, $a_t \leq 4$ ($w=4$ μέγιστη δυνατότητα παραγωγής) όπως και η ικανοποίηση της ζήτησης d_t στην αρχή της εβδομάδας t

με

t	1	2	3	4	5
d_t	2	1	4	1	2

δηλ. $x_t + a_t \leq d_t \Leftrightarrow a_t \leq d_t - x_t$

και το μέγιστο επίπεδο αποθέματος που διατηρώ ως την αρχή της επόμενης περιόδου δηλ. $x_{t+1} = x_t + a_t - d_t \leq 3$.

$$\Rightarrow a_t \leq 3 - x_t + d_t.$$

Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει το σύνολο αποφάσεων $D_t(x)$ αν $x_t = x$

$$a_t \in D_t(x) = [\max\{0, d_t - x_t\}, \min\{4, 3 - x_t + d_t\}] \quad \text{όπου } a_t \in \mathbb{Z}^+$$

δ) <u>Το άμεσο κόστος</u> στην αρχή της περιόδου t αν $x_t = x$ και $a_t = a$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$c_t(x,a) = k_t(a) + h_t \cdot (x + a - d_t)$$

όπου $h_t = 50$ για κάθε t και αντιστοιχεί στο μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης ενώ

$$k_t(a) = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ 500 + k_t \cdot a, & a > 0 \end{cases}$$

με

t	1	2	3	4	5
k_t	100	120	90	80	140

Το κόστος παραγωγής a βιβλίων με k_t το μοναδιαίο κόστος παραγωγής ανά εβδομάδα σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα.

ε) Δυναμική Συστήματος

$$(t, x) \xrightarrow{\ a\ } (t+1,\ x+a-d_t)$$

στ) Τερματικό Κόστος $\hat{v}(x) = 0$

Εξίσωση Βελτιστοποίησης $v(t,x)$ ελάχιστο συνολικό κόστος στην αρχή της περιόδου t ανέχοντας απόθεμα x και ως τη λήξη του ορίζοντα

$$v(t,x) = \min_{\max(0,\, d_t - x) \le a \le \min(4,\, 3 - x + d_t)} \left\{ k_t(a) + 50\,(x+a-d_t) + v(t+1;\, x+a-d_t) \right\} \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$v(6,x) = \hat{v}(x) = 0$$

Δίκτυο: Αρχικά υποθέτουμε ότι $x_1 = 0$ καθώς στην αρχή της 1ης εβδομάδας δεν υπάρχουν έτοιμες βιβλιοθήκες.

Σε κάθε βήμα t θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα το σύνολο των δυνατών αποφάσεων και μετά το άμεσο κόστος για κάθε δυνατή απόφαση.

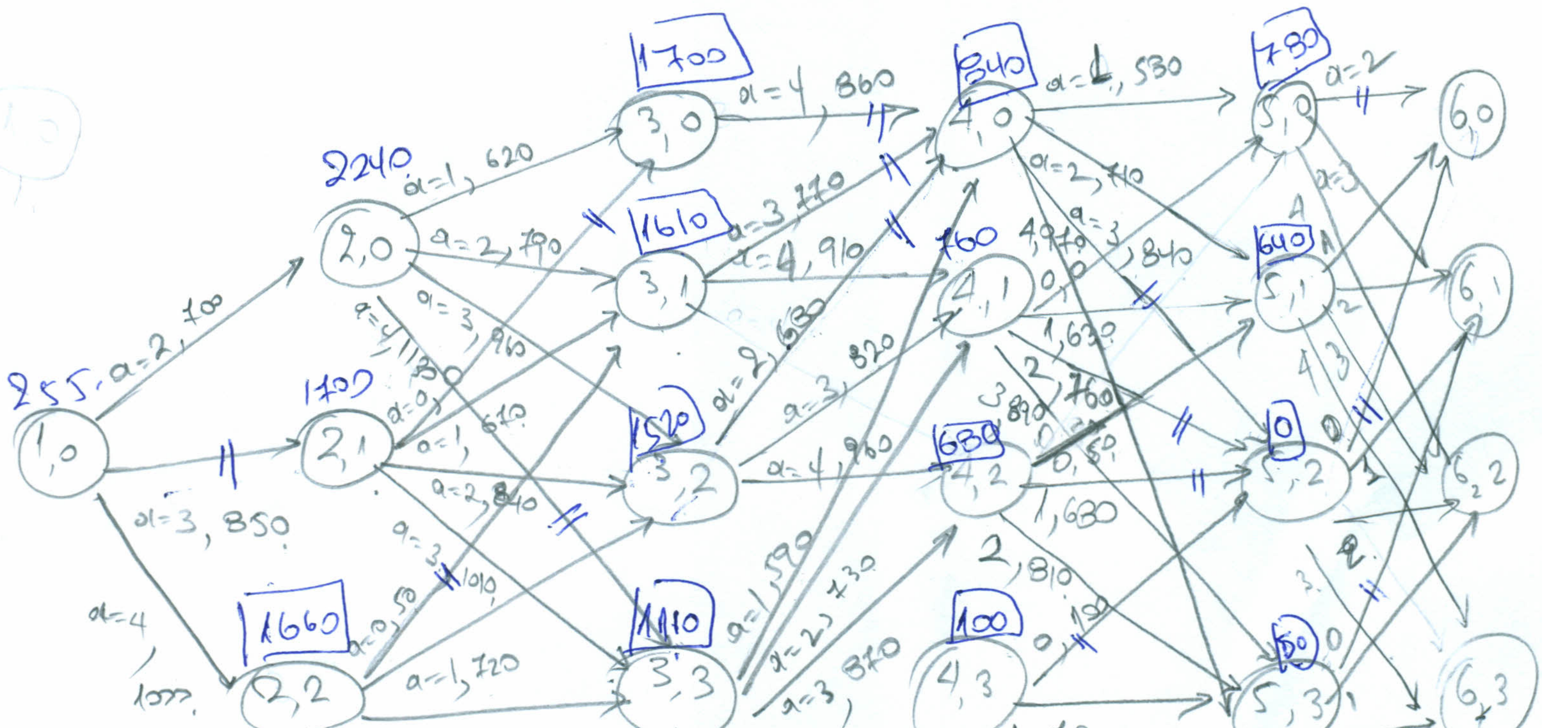
$t=1$: $d_1 = 2$ άρα $a \in \{2,3,4\}$ και $k_1(a) = \begin{cases} 700, & a=2 \\ 800, & a=3 \\ 900, & a=4 \end{cases}$ $\quad k_1 = 100$

$t=2$: $d_2 = 1$ άρα $a \in \{1,2,3,4\}$ αν $x=0$

$a \in \{0,1,2,3\}$, αν $x=1$

$a \in \{0,1,2\}$, αν $x=2$.

$k_2(a) = \begin{cases} 0, & a=0 \\ 620, & a=1 \\ 740, & a=2 \\ 860, & a=3 \\ 980, & a=4 \end{cases}$ $\quad k_2 = 120$



$t=3$: $d_3 = 4$ άρα $a \in \{4\}$ αν $x=0$

$a \in \{3,4\}$ $x=1$

$a \in \{2,3,4\}$ $x=2$

$a \in \{1,2,3,4\}$ $x=3$

$k_3(a) = \begin{cases} 590, & a=1 \\ 680, & a=2 \\ 770, & a=3 \\ 860, & a=4 \end{cases}$ $\quad k_3 = 90$

$t=4$: $d_4 = 1$. $k_4(a) = \begin{cases} 0, & a=0 \\ 580, & a=1 \\ 660, & a=2 \\ 740, & a=3 \\ 820, & a=4 \end{cases}$

$t=5$: $d_5 = 2$. $k_5(a) = \begin{cases} 0, & a=0 \\ 640, & a=1 \\ 780, & a=2 \\ 920, & a=3 \\ 1060, & a=4 \end{cases}$

όπου $v(6,x)=0$ για κάθε $x \in S=\{0,1,2,3\}$

$v(5,3)=\min\{50+v(6,1),\ 740+v(6,2),\ 1070+v(6,3)\}=50$ με $a^*=0$

$v(5,2)=\min\{0+v(6,0), \dots\}=0$ με $a^*=0$

$v(5,1)=\min\{640+v(6,0), \dots\}=640$ με $a^*=1$

$v(5,0)=\min\{780+v(6,0), \dots\}=780$ με $a^*=2$

$v(4,3)=\min\{100+v(5,2),\ 730+v(5,3)\}=100$ με $a^*=0$

$v(4,2)=\min\{50+v(5,1),\ 680+v(5,2),\ 810+v(5,3)\}=680$ με $a^*=1$

$v(4,1)=\min\{0+v(5,0),\ 630+v(5,1),\ 760+v(5,2),\ 890+v(5,3)\}$
$=760$ με $a^*=2$

$v(4,0)=\min\{580+v(5,0),\ 710+v(5,1),\ 840+v(5,2),\ 970+v(5,3)\}$
$=840$ με $a^*=3$.

$$v(3,3) = \min\{590 + v(4,0),\ 730 + v(4,1),\ 870 + v(4,2),\ 1010 + v(4,3)\} =$$
$$= 1110 \text{ με } a^* = 4$$

$$v(3,2) = \min\{680 + v(4,0),\ 820 + v(4,1),\ 960 + v(4,2)\} = 1520 \text{ με } a^* = 2$$

$$v(3,1) = \min\{770 + v(4,0),\ 910 + v(4,1)\} = 1610 \text{ με } a^* = 3$$

$$v(3,0) = 860 + v(4,0) =$$

$$v(2,2) = \min\{50 + v(3,1),\ 720 + v(3,2),\ 890 + v(3,3)\} = 1660 \text{ με } a^* = 0$$

$$v(2,1) = \min\{0 + v(3,0),\ 670 + v(3,1),\ 840 + v(3,2),\ 1010 + v(3,3)\}$$
$$= 1100 \text{ με } a^* = 0$$

$$v(2,0) = \min\{620 + v(3,0),\ 790 + v(3,1),\ 960 + v(3,2),\ 1130 + v(3,3)\}$$
$$= 2240 \text{ με } a^* = 4.$$

$$v(1,0) = \min\{700 + v(2,0),\ 850 + v(2,1),\ 1000 + v(2,2)\} = 2550 \text{ με } a^* = 3$$

Το ελάχιστο κόστος παραγωγής και διατήρησης αποθέματος είναι 2550 χρημ. μονάδες και η βέλτιστη πολιτική που το ορίζει είναι

$$(1,0) \xrightarrow{a^*=3} (2,1) \xrightarrow{a^*=0} (3,0) \xrightarrow{a^*=4} (5,3) \xrightarrow{a^*=0} (6,0)$$