

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

1^η Σειρά Ασκήσεων – Μάρτιος 2017

1. Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα και θέλει να καταστρώσει ένα πρόγραμμα παραγωγής. Το εργατικό της δυναμικό είναι 2000 εργατοώρες, ενώ χρησιμοποιείται και μία πρώτη ύλη που είναι διαθέσιμη σε ποσότητα 10000 μονάδων. Το κόστος της πρώτης ύλης είναι 20 ευρώ ανά μονάδα. Οι απαιτήσεις σε εργατοώρες και πρώτη ύλη για την παραγωγή και τα έσοδα πωλήσεων ανά προϊόν δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Όλα τα προϊόντα μπορούν να διατεθούν σε απεριόριστες ποσότητες και η εταιρία αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση των καθαρών εσόδων της.

Απαιτήσεις ανά προϊόν	Α	Β	Γ
Εργατοώρες	5	15	20
Πρώτη Ύλη	20	30	50
Έσοδο ανά μονάδα πώλησης	450	670	1230

Να διαμορφωθεί μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

2. Ζητείται από έναν διαιτολόγο να εκδώσει μια δίαιτα για έναν πελάτη του που τρέφεται αποκλειστικά με χοιρινό κρέας και πατάτες. Αν και γνωρίζει ότι αυτή δεν είναι η πιο υγιεινή δίαιτα, θέλει να είναι σίγουρος ότι ο πελάτης του θα τραφεί με τόση ποσότητα κρέατος και πατάτας, ώστε να ικανοποιεί τις ημερήσιες ανάγκες του σε πρωτεΐνες, υδατάνθρακες και λίπος. Για αυτό το λόγο έχει στη διάθεσή του τις ακόλουθες πληροφορίες κόστους και διατροφικής αξίας:

	Γραμ. Συστατικού ανά μερίδα		
Συστατικό	Χοιρινό	Πατάτες	Ημερήσιες ανάγκες σε γρ.
Υδατάνθρακες	5	15	τουλάχιστον 50
Πρωτεΐνες	20	5	τουλάχιστον 40
Λίπος	15	2	το πολύ 60
Κόστος ανά μερίδα	4 ευρώ	2 ευρώ	

Ο διαιτολόγος θέλει να αποφασίσει τον αριθμό των μερίδων ανά ημέρα από κρέας και πατάτες, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ημερήσιες ανάγκες του πελάτη σε διατροφικά συστατικά και να ελαχιστοποιείται το κόστος της ημερήσιας διατροφής.

- (α) Να διαμορφωθεί πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα χωρίς να λάβετε υπόψη σας περιορισμούς ακεραιότητας.
- (β) Να επιλυθεί το πρόβλημα γραφικά.
- (γ) Να επιλυθεί το παραπάνω π.γ.π. με τη μέθοδο Simplex.
- (δ) Να διατυπωθεί και να επιλυθεί το δυϊκό πρόβλημα.
3. Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα και θέλει να καταστρώσει ένα μηνιαίο πρόγραμμα παραγωγής. Το εργατικό της δυναμικό το μήνα αυτό είναι 1600 εργατοώρες κανονικής εργασίας με κόστος 10 ευρώ ανά ώρα, αλλά υπάρχει δυνατότητα επιπλέον το πολύ 800 ωρών υπερωριών με κόστος υπερωρίας 20 ευρώ την ώρα. Οι κανονικές ώρες εργασίας πρέπει να πληρωθούν είτε χρησιμοποιηθούν είτε όχι. Επιπλέον χρησιμοποιείται μία πρώτη ύλη που είναι διαθέσιμη σε ποσότητα 1000 τόνων τον μήνα και δεν είναι δυνατή πρόσθετη διαθεσιμότητα. Οι απαιτήσεις για την παραγωγή και τα έσοδα πωλήσεων των προϊόντων δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Τα προϊόντα Α, Β μπορούν να διατεθούν σε απεριόριστες ποσότητες αλλά το προϊόν Γ μπορεί να διατεθεί μέχρι το ύψους των 100 μονάδων.

Απαιτήσεις ανά προϊόν	A	B	Γ
Εργατοώρες	9	2	4
Πρώτη Ύλη	3	8	6
Κέρδος ανά μονάδα πώλησης	190	30	90

Να διαμορφωθεί μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

4. Μία βιομηχανία πλαστικών παράγει δύο ειδών πλαστικές σωλήνες (φαρδιές και στενές) για υδραυλικές εγκαταστάσεις. Και οι δύο τύποι παράγονται στο ίδιο μηχάνημα που έχει δυναμικότητα 200 μέτρα την ώρα για τις φαρδιές και 300 μέτρα την ώρα για τις στενές σωλήνες. Το συγκεκριμένο μηχάνημα εργάζεται 8 ώρες την ημέρα και η εταιρεία θέλει να μεγιστοποιήσει το συνολικό μήκος και των δύο σωλήνων που παράγει ανά ημέρα. Όμως, λαμβάνοντας υπόψη της ανάγκες της αγοράς, η ποσότητα κανενός από τα δύο δεν μπορεί να υπερβαίνει κατά περισσότερο από 25% τη ποσότητα του άλλου είδους. Να διαμορφωθεί το παραπάνω πρόβλημα ως π.γ.π. και να βρεθεί η άριστη λύση του γραφικά.
5. Ο ελάχιστος αριθμός σερβιτόρων που κάποιο εστιατόριο χρειάζεται τις επτά ημέρες της εβδομάδας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Ημέρα	Δευτ.	Τρίτη	Τετάρ.	Πέμπτη	Παρ.	Σάβ.	Κυρ.
Σερβιτόροι	7	7	10	12	14	16	10

Αν κάθε σερβιτόρος πρέπει να δουλεύει πέντε συνεχόμενες ημέρες και μετά να έχει ρεπό δύο ημερών, υποδείξτε π.γ.π. για την εύρεση του ελάχιστου συνολικού αριθμού σερβιτόρων που πρέπει να απασχολούνται στο εστιατόριο.

Υπόδειξη: Να θεωρήσετε x_i το πλήθος σερβιτόρων που ξεκινάνε εργασία την i -ημέρα ($i = 1, \dots, 7$, όπου $i = 1$ η Δευτέρα).

6. Ο γενικός υπεύθυνος του κέντρου υπολογιστών σε ένα πανεπιστήμιο πρέπει να αποφασίσει για την πρόσληψη υπαλλήλων που θα απασχοληθούν στο κέντρο. Το κέντρο λειτουργεί καθημερινά από τις 8 το πρωί μέχρι τα μεσάνυχτα και ο υπεύθυνος έχει παρατηρήσει ότι οι ανάγκες του κέντρου υπολογιστών σε υπαλλήλους για τις διάφορες ώρες είναι οι ακόλουθες:

Χρονικό Διάστημα	Απαιτούμενο Προσωπικό
8.00 – 12.00	4
12.00 – 16.00	8
16.00 – 20.00	10
20.00 – 24.00	6

Υπάρχουν δύο τύποι υπαλλήλων που μπορούν να προσληφθούν: οι πλήρους (full-time) και οι μερικής (part-time) απασχόλησης. Οι υπάλληλοι πλήρους απασχόλησης δουλεύουν 8 συνεχόμενες ώρες σε οποιαδήποτε από τις ακόλουθες βάρδιες: πρωινή (8.00 – 16.00), μεσημεριανή (12.00 – 20.00) και βραδυνή (16.00 – 24.00) και αμοιβούνται με 14 ευρώ την ώρα. Οι υπάλληλοι μερικής απασχόλησης δουλεύουν 4 συνεχόμενες ώρες σε οποιαδήποτε από τις 4 βάρδιες που φαίνονται στο παραπάνω πινακάκι και αμοιβούνται με 12 ευρώ την ώρα. Στους κανονισμούς λειτουργίας του εργαστηρίου υπάρχει κι ένας πρόσθετος όρος που λέει ότι σε κάθε χρονική περίοδο πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 2 υπάλληλοι πλήρους απασχόλησης για κάθε υπάλληλο μερικής που απασχολείται. Ο γενικός υπεύθυνος θέλει να αποφασίσει πόσοι υπάλληλοι από κάθε τύπο θα απασχολούνται σε κάθε χρονικό διάστημα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος αμοιβών.

Να διαμορφωθεί μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα.

7. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \min \quad & (5x_1 + 6x_2) \\ 3x_1 + 4x_2 \quad & \leq 18 \\ -2x_1 - x_2 \quad & \geq -7 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να επιλυθεί γραφικά.

(β) Να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

(γ) Να διατυπωθεί και να επιλυθεί το δυϊκό πρόβλημα χρησιμοποιώντας την άριστη λύση του πρωτεύοντος.

8. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \min \quad & (6x_1 + 4x_2) \\ 0.75x_1 + 1.5x_2 \quad & \leq 12 \\ 6x_1 + 2x_2 \quad & \geq 72 \\ x_1 + x_2 \quad & = 10 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

(β) Να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα.

9. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 + x_2 - 3x_3) \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \quad & = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 \quad & = 12 \\ 4x_2 - 3x_3 \quad & \geq -10 \\ x_1, x_2, x_3 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

(β) Να διατυπωθεί και να επιλυθεί το δυϊκό πρόβλημα χρησιμοποιώντας την άριστη λύση του πρωτεύοντος.

10. Δίνεται το παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{aligned} \max \quad & (15x_1 + 10x_2) \\ x_2 \quad & \leq 50 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \quad & \leq -20 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να επιλυθεί γραφικά.

(β) Να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.

(γ) Να διατυπωθεί και να επιλυθεί το δυϊκό πρόβλημα χρησιμοποιώντας την άριστη λύση του πρωτεύοντος.

Επιμέλεια Ασκήσεων: Γιάννης Δημητρακόπουλος