Λύσεις

1ης Σειράς Ασκήσεων

31/3/2017

① **Μεταβλητές Απόφασης**

Έστω x_1, x_2, x_3 οι παραγόμενες ποσότητες από τα προϊόντα Α, Β, Γ, αντίστοιχα.

Αντικειμενική Συνάρτηση

Μεγιστοποίηση Συνολικού κέρδους

$$\max\left(\underbrace{450x_1 + 670x_2 + 1230x_3}_{\text{συνολικό έσοδο από την πώληση}} - \underbrace{20\cdot\underbrace{(20x_1 + 30x_2 + 50x_3)}_{\text{συνολική πρώτη ύλη}}}_{\text{συνολικό κόστος για πρώτη ύλη}}\right)$$

άρα $\max\left(50x_1 + 70x_2 + 230x_3\right)$

Περιορισμοί

Διαθέσιμες Εργατοώρες : $5x_1 + 15x_2 + 20x_3 \le 2000$

Διαθέσιμη Πρώτη Ύλη : $20x_1 + 30x_2 + 50x_3 \le 10.000$

Περιορισμός μη-αρνητικότητας x_1, x_2, x_3 ποσότητες : $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Διατύπωση προβλήματος σε ΠΓΠ

$$z = 10 \max (5x_1 + 7x_2 + 23x_3)$$

υπό τους
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 400$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 1000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Κανονική Μορφή: Εισάγουμε τις $x_4, x_5 \geq 0$ περιθώριες μεταβλητές στον 1ο, 2ο περιορισμό αντίστοιχα. άρα

$$z = 10 \max (5x_1 + 7x_2 + 23x_3)$$

υπ.
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 400$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 1000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Επίλυση με Simplex: Το ΠΓΠ είναι σε κ.μ. και ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τις στήλες του I_2 προκύπτει η αρχική βελ $\underline{x}_0$ με βασικό πίνακα

$$B = (\underline{P}_4, \underline{P}_5) = I_2 \quad \text{και} \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \text{με } z_0 = 0$$

1ο tableau

			5	7	23	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_4	0	400	1	3	$\boxed{4}$	1	0	$400/4 = 100$	$\Gamma_1 \to \frac{\Gamma_1}{4}$
P_5	0	1000	2	3	5	0	1	$1000/5 = 200$	$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 5\Gamma_1$
	z	0	−5	−7	−23	0	0		

2ο tableau

B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	23	100	$1/4$	$3/4$	1	$1/4$	0
P_5	0	500	$3/4$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	1
	z	2300	$\frac{3}{4}$	$\frac{41}{4}$	0	$\frac{23}{4}$	0

η x_0 δεν είναι άριστη γιατί $z_3 - c_3 = -23 < 0$ άρα θα μπει στη βάση η P_3 στη θέση της P_4

άρα $z_j - c_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, 5$ άρα η

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$$

είναι άριστη λύση του ΠΓΠ με $z = 10 \cdot 2300$

$z = 23000$

2

Διαμόρφωση ΠΓΠ.

Έστω x_1, x_2 οι μερίδες από χοιρινό και πατάτες

ανά ημέρα. Τότε

ελαχιστοποιήστε του συνολικού κόστους ημερήσιας διατροφής $\longrightarrow z = \min(1x_1 + 2x_2)$

υ.π.

Υδατάνθρακες: $5x_1 + 15x_2 \geq 50$

Πρωτεΐνες: $20x_1 + 5x_2 \geq 40$

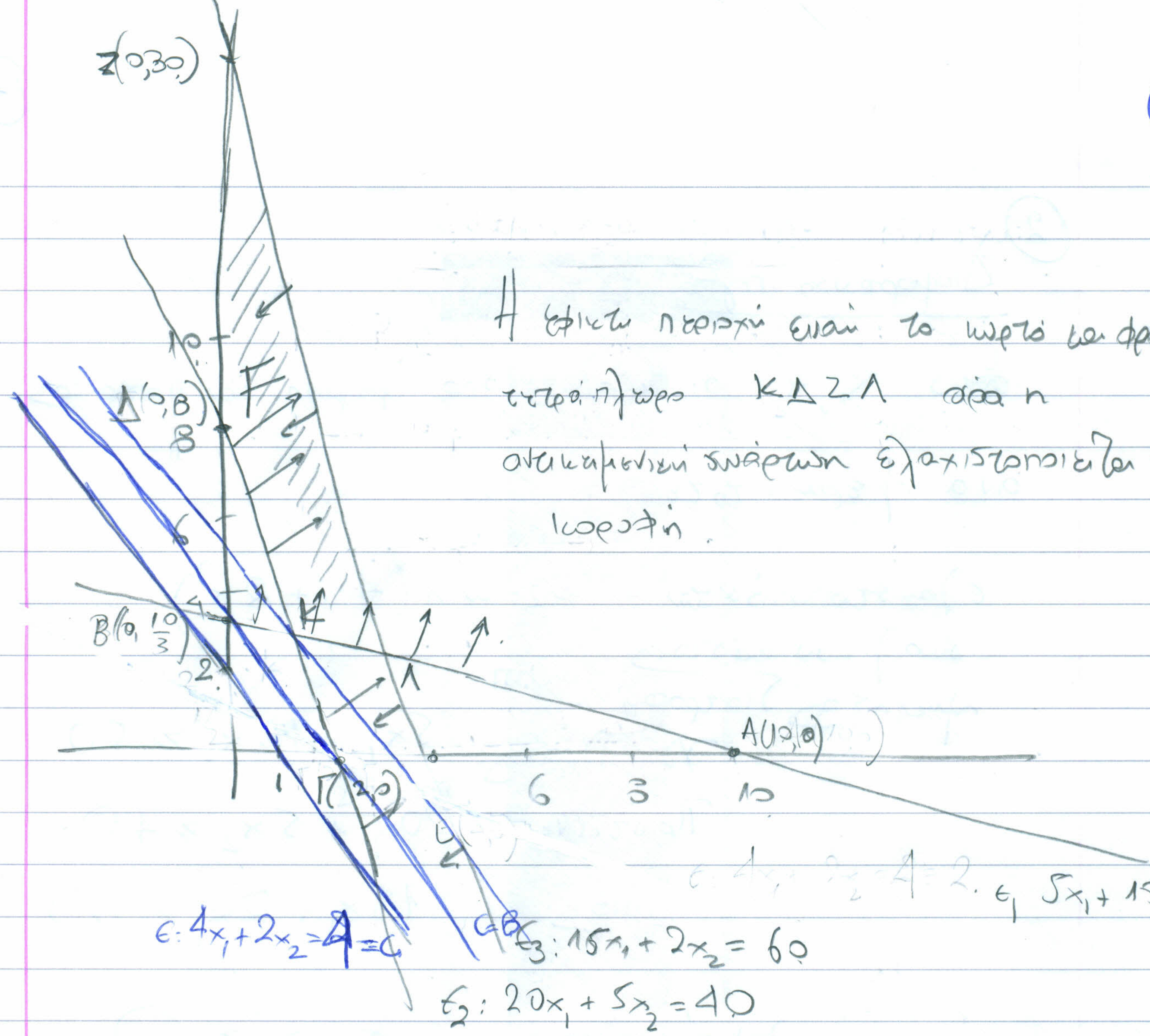
Λίπος: $15x_1 + 2x_2 \leq 60$

(Δεν λαμβάνω υπόψη $x_1, x_2 \geq 0$ περιορισμούς ακεραιότητας)

Γραφική Επίλυση

Σχεδιάζουμε στο σύστημα των Ox_1x_2 (1ο τεταρτημόριο γιατί $x_1, x_2 \geq 0$) την εφικτή περιοχή F που αντιστοιχεί στο παραπάνω ΠΓΠ. ως εξής:

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που προκύπτουν κάνοντας τους περιορισμούς ισότητες και η F προκύπτει ως τομή των αντίστοιχων ημιεπιπέδων



Η εφικτή περιοχή είναι το κυρτό και φραγμένο τετράπλευρο ΚΔΖΛ άρα η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται σε κορυφή.

Θεωρώ την ευθεία ε: $4x_1+2x_2=c$ που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση για διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται στη κορυφή Κ που είναι η τομή των $ε_1$ και $ε_2$.

(η μικρότερη τιμή του $c \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την εφικτή περιοχή F)

Λύνω το σύστημα
$$\left.\begin{aligned} 5x_1+15x_2&=50 \\ 20x_1+5x_2&=40 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1=\frac{70}{55}=\frac{14}{11}, \quad x_2=\frac{32}{11}$$

άρα η άριστη λύση είναι η $x^*=\begin{pmatrix} 14/11 \\ 32/11 \end{pmatrix}$ με $z=\frac{120}{11}$ €

Διατύπωση δυϊκού προβλήματος

Έστω w_1, w_2, w_3 οι δυϊκές μεταβλητές (αντιστοιχούν στους 3 περιορισμούς του (Π)) τότε

το δυϊκό πγπ είναι το παρακάτω

$$\max \left(50w_1 + 40w_2 + 60w_3\right)$$

υπ. $5w_1 + 20w_2 + 15w_3 \le 4$ (μαζί $x_1 \geq 0$)

$15w_1 + 5w_2 + 2w_3 \le 2$ (μαζί $x_2 \geq 0$)

$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \le 0$

Κανονική Μορφή

$$\max \left(50w_1 + 40w_2 - 60w_3'\right)$$

$5w_1 + 20w_2 - 15w_3' + w_4 = 4$

$15w_1 + 5w_2 - 2w_3' + w_5 = 2$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3' = -w_3 \geq 0$

$w_4, w_5 \geq 0$ (περιθώριες μεταβλητές)

Επίλυση του δυϊκού: Η άριστη λύση του (Π) είναι η $\underline{x}^* = \left(\frac{14}{11}, \frac{32}{11}\right)^t$ με τιμή της α.σ. $z_{\Pi}^* = \frac{120}{11}$

Από το ισχυρό θεώρημα δυϊκότητας προκύπτει ότι και το (Δ) έχει άριστη λύση, έστω $\underline{w}^* = (w_1^*, w_2^*)^t$ με τιμή $z_{\Delta}^* = z_{\Pi}^* = \frac{120}{11}$

Από το θεώρημα συμπληρωματικότητας προκύπτει ότι οι δύο περιορισμοί

του (Δ) ικανοποιούνται ως ισότητες στην άριστη λύση του, αφού $x_1^*, x_2^* > 0$. Άρα
$$\begin{cases} 5w_1^* + 20w_2^* + 15w_3^* = 4 \\ 15w_1^* + 5w_2^* + 2w_3^* = 2. \end{cases}$$

Επιπλέον για $x_1^* = \frac{14}{11}$ και $x_2^* = \frac{32}{11}$, ο 3ος περιορισμός του (Π) γίνεται $60 - 15x_1^* - 2x_2^* = 60 - 15 \cdot \frac{14}{11} - 2 \cdot \frac{32}{11} = \frac{386}{11} > 0$

άρα από το Θεώρημα συμπληρωματικότητας προκύπτει ότι $w_3^* = 0$

και το παραπάνω σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 5w_1^* + 20w_2^* = 4 \\ 15w_1^* + 5w_2^* = 2 \end{cases} \Rightarrow w_1^* = \frac{12}{165},$$

$$w_2^* = \frac{2}{11}$$

Άρα η άριστη λύση του (Δ) είναι η $\underline{w}^* = \left(\frac{12}{165}, \frac{2}{11}\right)^t$

με $z_\Delta^* = \frac{120}{11}$

3

Μεταβλητές Απόφασης: x_1, x_2, x_3 παραγόμενη ποσότητα απ' τα Α, Β, Γ προϊόντα αντίστοιχα και x_4 οι υπερωρίες που θα χρησιμοποιηθούν.

Αντικειμενική Συνάρτηση: Μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους

	Α	Β	Γ
κέρδος / μον. προϊόντος	190	30	90

Συνολικό κέρδος από πώληση: $190x_1 + 30x_2 + 90x_3$

κόστος βασικών ωρών εργασίας: $1600 \cdot 10$

κόστος υπερωριακής απασχόλησης: $20 \cdot x_4$

άρα $\max\left(190x_1 + 30x_2 + 90x_3 - 16000 - 20x_4\right)$

Περιορισμοί

Διαθέσιμες εργατοώρες: $9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1600 + x_4$

Διαθέσιμη πρώτη ύλη: $3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 1000$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ (ποσότητες)

$0 \leq x_4 \leq 800$ (υπερωρίες)

Το πρόβλημα διαμορφώνεται στο παρακάτω ΠΓΠ

$$z = 10\max(119x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 2x_4) - 16000$$

υ.π.

$$9x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 1600$$

$$3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 1000$$

$$x_4 \geq 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(4) Έστω x_1, x_2 τα παραγόμενα μήκος σε m από φαρδιές και στενές σωλήνες αντίστοιχα.

Το ΠΓΠ που αντιστοιχεί στη μεγιστοποίηση του συνολικού μήκους

είναι $\max(x_1 + x_2)$.

υ.π.

Διαθεσιμότητα Μηχανήματα $\frac{x_1}{200} + \frac{x_2}{300} = 8$

[Για τη γραφική επίλυση μπορώ να θεωρήσω $\leq$ χωρίς βλάβη]

Απαιτήσεις Αγοράς $x_1 \leq 1{,}25x_2$

$$x_2 \leq 1{,}25x_1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

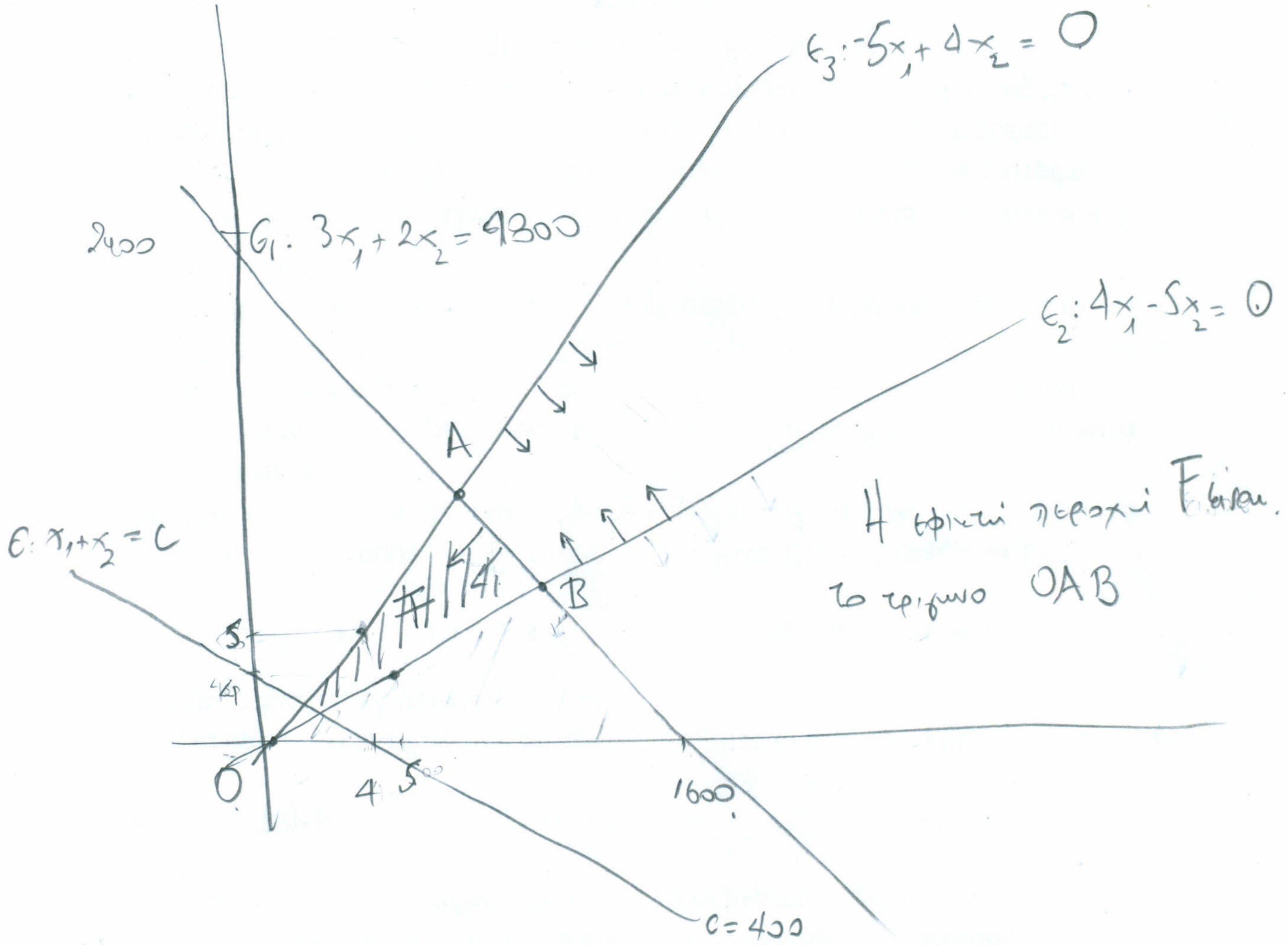
Γραφική Επίλυση

Σημεία τομής

$\varepsilon_1: 3x_1 + 2x_2 = 4800$ $\quad (1600,0) \quad (0,2400)$

$\varepsilon_2: 4x_1 - 5x_2 = 0$ $\quad (0,0) \quad (5,4)$

$\varepsilon_3: 4x_2 - 5x_1 = 0$ $\quad (0,0) \quad (4,5)$



Η εφικτή περιοχή F είναι το τρίγωνο OAB

Θεωρώ την ευθεία της α.σ. $\varepsilon: x_1 + x_2 = c = 400$

Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό και φραγμένο σύνολο άρα η α.σ. μεγιστοποιείται σε κορυφή και συγκεκριμένα στην κορυφή A που είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 άρα

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4800 \\ -5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{9600}{11} \\ x_2 &= \frac{12000}{11} \end{aligned} \quad \text{με } z^* = \frac{21600}{11}$$

5 Έστω x_i το πλήθος σερβιτόρων που ξεκινάει εργασία την i-ημέρα $i=1,\dots 7$ με $i=1$ την Δευτέρα

Συνολικός αριθμός σερβιτόρων

$$\min\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\right)$$

Παρασκευή $\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 14$

Σάββατο $\quad x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 16$

Κυριακή $\quad x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 10$

Δευτέρα $\quad x_4+x_5+x_6+x_7+x_1 \geq 7$

Τρίτη $\quad x_5+x_6+x_7+x_1+x_2 \geq 7$

Τετάρτη $\quad x_6+x_7+x_1+x_2+x_3 \geq 10$

Πέμπτη $\quad x_7+x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 12.$

$$x_1, x_2, \dots x_7 \geq 0$$

6

Μεταβλητές απόφασης

Ο υπεύθυνος θέλει να αποφασίσει πόσους υπαλλήλους θα απασχολήσει από κάθε τύπο άρα θεωρούμε

x_{1j} = πλήθος υπαλλήλων full-time που εργάζονται στη χρονική περίοδο
- $j=1$: 8-4
- $j=2$: 12-8
- $j=3$: 4-12

x_{2j} = πλήθος υπαλλήλων part-time που εργάζονται στη χρονική περίοδο
- $j=1$: 8-12
- $j=2$: 12-4
- $j=3$: 4-8
- $j=4$: 8-12

Αντικειμενική Συνάρτηση

Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους

$$\min\left(14\cdot 8\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 12\cdot 4\cdot(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})\right)$$

Περιορισμοί: Ελάχιστο πλήθος υπαλλήλων / χρονική περίοδο

8-12: $x_{11} + x_{21} \geq 4$

12-4: $x_{11} + x_{12} + x_{22} \geq 8$

4-8: $x_{12} + x_{13} + x_{23} \geq 10$

8-12: $x_{13} + x_{24} \geq 6$

Τουλάχιστον 2 υπάλληλοι full-time για κάθε part-time υπάλληλο

8-12 $\quad x_{11} \geq 2x_{21}$

12-4 $\quad x_{11} + x_{12} \geq 2x_{22}$

4-8 $\quad x_{12} + x_{13} \geq 2x_{23}$

8-12 $\quad x_{13} \geq 2x_{24}$

Μη αρνητικότητα $\quad x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0$

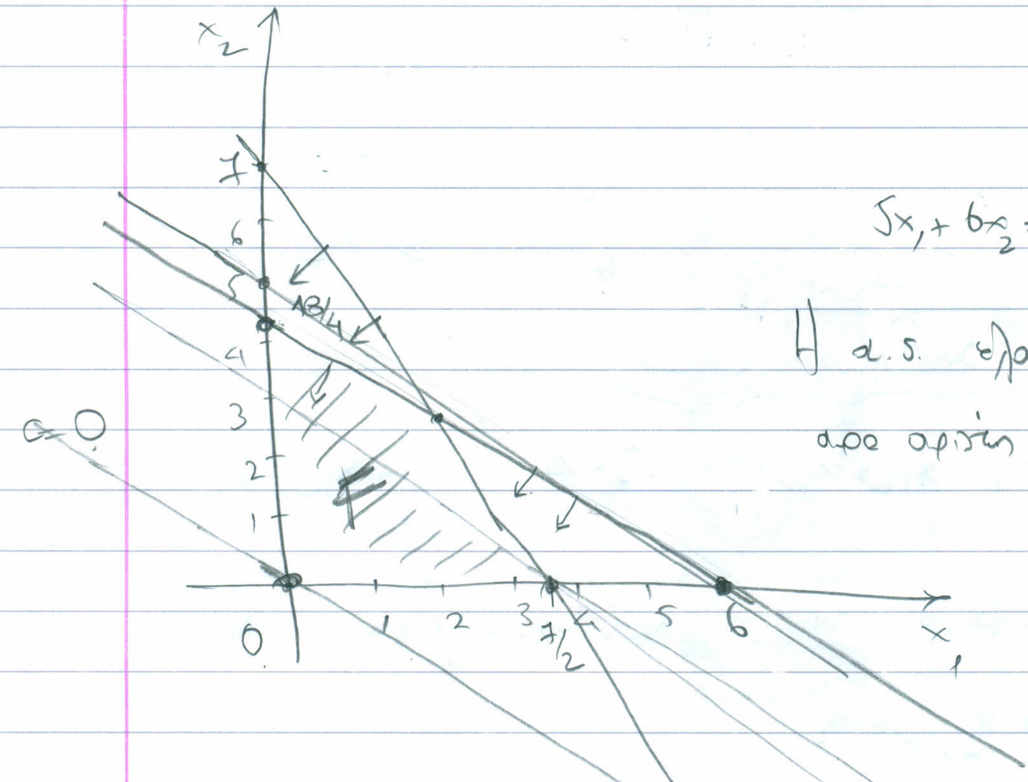
(7)

$$\min(5x_1 + 6x_2) \qquad\qquad z = \min(5x_1 + 6x_2)$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 18 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 + 4x_2 \leq 18$$

$$-2x_1 - x_2 \geq -7 \qquad\qquad 2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0$$



$\varepsilon_1: 3x_1 + 4x_2 = 18$

$5x_1 + 6x_2 = c = 30$

Η α.σ. ελαχιστοποιείται στο $(0,0)$

άρα άριστη λύση η $x_1 = x_2 = 0$

με $z = 0$

Η κανονική μορφή του ΠΓΠ είναι

$$z = -\max(-5x_1 - 6x_2)$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 18$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

			-5	-6	0	0
B	C_B	b	$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$	$\underline{P_3}$	$\underline{P_4}$
$\underline{P_3}$	0	18	3	4	1	0
$\underline{P_4}$	0	7	2	1	0	1
	z	0	5	6	0	0

οπότε η $x_0 = (0, 0, 18, 7)^t$ είναι άριστη λύση με $z^* = 0$

δ) Το αντίστοιχο δυϊκό ΠΓΠ είναι

$$z = \max(18w_1 + 7w_2)$$

$$3w_1 + 2w_2 \leq 5 \quad (x_1 \geq 0)$$

$$4w_1 + w_2 \leq 6 \quad (x_2 \geq 0)$$

$$w_1, w_2 \leq 0$$

(οι περιορισμοί του (Π) είναι ≤ που είναι αποδεκτοί στη προβλ. μορφή για min)

Από (β) έχουμε ότι η άριστη λύση του (Π) είναι η

$\underline{x}^* = (0, 0)^t$ με $z^* = 0$

Από το ισχυρό θεώρημα έχουμε ότι το (Δ) έχει ορισμένη λύση, έστω την $\underline{w}^* = (w_1^*, w_2^*)^t$ με τιμή α.σ. $z^* = 0$.

Από θεώρημα συμπληρωματικότητας έχουμε

$$\left.\begin{aligned} w_1^*(3x_1^* + 4x_2^* - 18) &= 0 \\ w_2^*(9x_1^* + x_2^* - 7) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \overset{x_1^* = x_2^* = 0}{\Rightarrow} \quad w_1^* = w_2^* = 0 \text{ με } z^* = 0$$

(8)

$$\begin{aligned} &\min(6x_1 + 4x_2) \\ &\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 \le 12 \\ &6x_1 + 2x_2 \ge 72 \\ &x_1 + x_2 = 10 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\min(6x_1 + 4x_2) \\ &3x_1 + 2x_2 \le 16 \\ &3x_1 + x_2 \ge 36 \\ &x_1 + x_2 = 10 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Μετατροπή στην ΚΜ

$$z = -\max(-6x_1 - 4x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 &= 36 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

άρα δεν μπορώ να βρω αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ.

<u>M-μέθοδος</u> Εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές $x_5, x_6 \geq 0$ στο 2ο και 3ο περιορισμό και για $M << 0$.

Θεωρούμε το ΠΓΠ

$$z = -\max\left(-6x_1 - 4x_2 + Mx_5 + Mx_6\right)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$$

$$3x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 = 36$$

$$x_1 + x_2 \quad + x_6 = 10$$

$$x_1, \ldots x_6 \geq 0$$

Εδώ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ άρα υπάρχει αρχική

(μη εκφυλισμένη) βελ., η $\underline{x}_0 = (0, 0, 16, 0, 36, 10)^t$

			-6	-4	0	0	M	M		
B	c_B	b	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_2$	$\underline{P}_3$	$\underline{P}_4$	$\underline{P}_5$	$\underline{P}_6$	θ	
$\underline{P}_3$	0	16	1	2	1	0	0	0	$16/1$	$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3$
$\underline{P}_5$	M	36	3	1	0	-1	1	0	$36/3$	$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_3$
$\underline{P}_6$	M	10	$\boxed{1}$	1	0	0	0	1	$10/1$	
	z	$46M$	$4M+6$	$2M+4$	0	$-M$	0	0		
$\underline{P}_3$	0	6	0	1	1	0	0			
$\underline{P}_5$	M	6	0	-2	0	-1	1			
$\underline{P}_1$	-6	10	1	1	0	0	0			
	z	$6M-60$	0	$-2M-2$	0	$-M$	0			

Η $\underline{x}_1 = (10, 0, 6, 0, 6, 0)^t$ είναι άριστη λύση

$z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, 6$ άρα το αρχικό πγπ

είναι μη φραγμένο. Δηλ. $z = -\infty$ δεν υπάρχει πεπερασμένο μέγιστο (ελάχιστο)

(β) Από το αρχικό πγπ δηλ. το (Π) προκύπτει το δυϊκό του ως εξής:

$$\max(12w_1 + 72w_2 + 10w_3)$$

$$\frac{3}{4}w_1 + 6w_2 + w_3 \leq 6 \quad (x_1 \geq 0)$$

$$\frac{3}{2}w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 4 \quad (x_2 \geq 0)$$

$$w_1 \leq 0, \; w_2 \geq 0, \; w_3 \in \mathbb{R}.$$

(9) (α) Η κανονική μορφή του πγπ είναι η εξής:

$$z = -\max(-x_1 - x_2 + 3x_3)$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(18)

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

δεν έχει τη στήλη $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ του I_3 και άρα δεν μπορώ

να βρω αρχική (μη εκφυλισμένη) β.ε.λ.

Από τη μέθοδο των τεχνητών μεταβλητών προσθέτω στον

2ο περιορισμό τη τεχνητή μεταβλητή $x_5 \geq 0$ με

συντελεστή στην α.σ. M $(M \to -\infty)$

Τότε το ΠΓΠ γίνεται

$$z = -\max(-x_1 - x_2 + 3x_3 + Mx_5)$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_5 = 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

το οποίο έχει αρχική βελ την $\underline{x}_0 = (7, 0, 0, 10, 12)^t$

B	c_B	b	P_1 (-1)	P_2 (-1)	P_3 (3)	P_4 (0)	P_5 (M)	θ	
P_1	-1	7	1	3	-1	0	0	—	$\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2$
P_5	M	12	0	-2	$\boxed{4}$	0	1	$12/4$	$\Gamma_2 \to \frac{\Gamma_2}{4}$
P_4	0	10	0	-4	3	1	0	$10/3$	$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2$
	z	$12M-7$	0	$-2M-2$	$4M-2$	0	0		
P_1	-1	10	1	$\boxed{5/2}$	0	0		$10/5/2=4$	$\Gamma_1 \to \frac{2}{5}\Gamma_1$
P_3	3	3	0	$-1/2$	1	0		—	$\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_1$
P_4	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	1		—	$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{5}{2}\Gamma_1$
	z	-1	0	-3	0	0			
P_2	-1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	0			
P_3	3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	0			
P_4	0	11	1	0	0	1			
	z	11	$\frac{6}{5}$	0	0	0			

άρα η $\underline{x}^* = (0, 4, 5, 11)$ αποτελεί λύση του αρχικού ΠΓΠ

με $z^* = -11$.

(β) Το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα είναι το

$$\max\left(7w_1 + 12w_2 - 10w_3\right)$$

$$w_1 \leq 1$$

$$3w_1 - 2w_2 + 4w_3 \leq 1 \qquad (\Delta)$$

$$-w_1 + 4w_2 - 3w_3 \leq -3$$

$$w_1, w_2 \in \mathbb{R}, \quad w_3 \geq 0$$

Από την άριστη λύση του (Π) που βρήκαμε στο ερώτημα (α)

η $x_2^* = 4$, $x_3^* = 5 > 0$ και άρα ο 2ος και ο 3ος

περιορισμός του (Δ) ικανοποιούνται ως ισότητες στην

άριστη λύση του (Δ) άρα για $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*)^t$ έχω

ότι $3w_1^* - 2w_2^* + 4w_3^* = 1$ $\Rightarrow$

$$-w_1 + 4w_2 - 3w_3 = -3$$

και για $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 5$ έχω ότι ο 3ος περιορισμός του (Π) ικανοποιείται ως $4 \cdot x_2^* - 3x_3^* = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1 > -10$

γνήσια ανισότητα και άρα $w_3^* = 0$

άρα το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 3w_1^* - 2w_2^* = 1 \\ -w_1^* + 4w_2^* = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1^* = -\frac{1}{5} \\ w_2^* = -\frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{με } z^* = -11$$

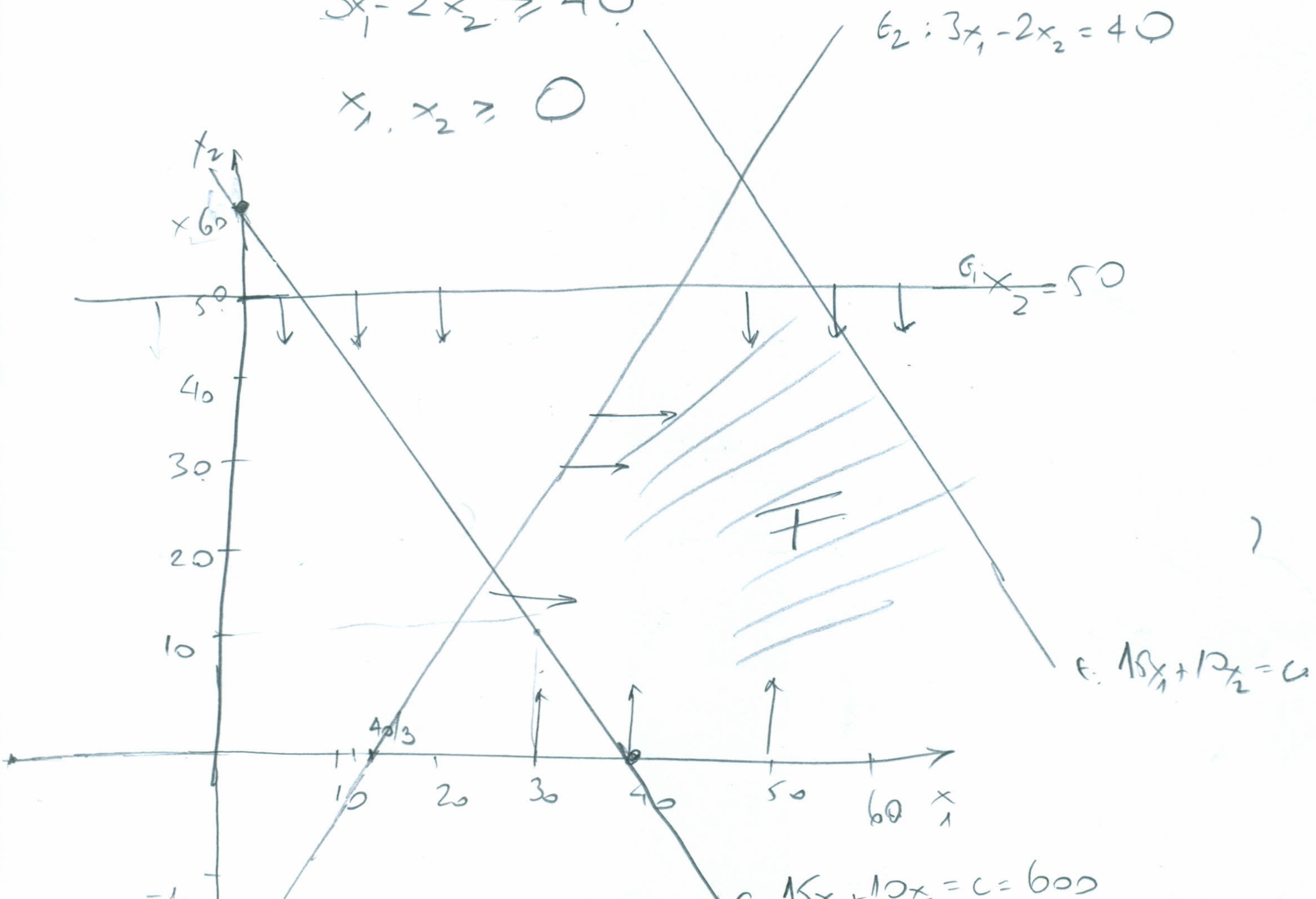
(10)

(a) $\max(15x_1 + 10x_2)$

$x_2 \leq 50$

$3x_1 - 2x_2 \geq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$



θεωρώ την ε: $15x_1 + 10x_2 = c = 600$

άρα το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

(β) Η κανονική μορφή του ΠΓΠ είναι η παρακάτω

$$\max(15x_1 + 10x_2)$$

$$x_2 + x_3 = 50$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_4 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Επειδή ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ δεν υπάρχει η στήλη $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ στον A

και άρα δεν μπορούμε να βρούμε αρχική β.ε.λ.

Εφαρμόζουμε τη M-μέθοδο και εισάγουμε τη τεχνητή μεταβλητή x_5 στο 2^o περιορισμό με συντελεστή στην α.σ. M όπου $M \to -\infty$. Το νέο ΠΓΠ είναι το εξής

$$\max(15x_1 + 10x_2 + Mx_5)$$

$$x_2 + x_3 = 50$$

$$3x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 40$$

$$x_1, \dots x_5 \geq 0$$

με αρχική βελ την $\underline{x}_0 = (0, 0, 50, 0, 40)$

B	c_B	b	P_1 (15)	P_2 (10)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (M)	θ	
P_3	0	50	0	1	1	0	0	—	
P_5	M	40	$\boxed{3}$	-1	0	-1	1	$40/3$	$\Gamma_3 \to \frac{\Gamma_3}{3}$
	z	40M	$3M-15$	$-M-10$	0	$-M$	0		
P_3	0	50	0	$\boxed{1}$	1	0		$50/1$	
P_1	15	$\frac{40}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$		—	$\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_1$
	z	200	0	$-\frac{45}{3}$	0	$-\frac{15}{3}$			
P_2	10	50	0	1	1	0		—	
P_1	15	$\frac{90}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		—	ΠΓΠ μη φραγμένο.
	z		0	0	$\frac{45}{3}$	$-\frac{15}{3}$			

(γ) Το αντίστοιχο δυϊκό ΠΓΠ είναι το παρακάτω

$$\min\ (50w_1 + 40w_2)$$

$$3w_2 \geq 15$$

$$w_1 - 2w_2 \geq 10$$

$$w_1 \geq 0\ ,\ w_2 \leq 0$$

Επειδή το (Π) είναι μη φραγμένο $\Rightarrow$ (Δ) είναι ανέφικτο απ' το ισχυρό θεώρημα δυϊκότητας.