Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

28/4/2017.

1) Έχουμε πρόβλημα μεταφοράς όπου από κάθε περιοχή (πηγή) μεταφέρουμε μαθητές σε κάθε σχολείο (προορισμό) με $a_1 = 120$, $a_2 = 240$, $a_3 = 450$ και $a_4 = 190 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} a_i = 1000$

και $b_1 = 200$, $b_2 = 400$, $b_3 = 400 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} b_j = 1000$

Άρα το πρόβλημα είναι ισορροπημένο και μια αρχική β.ε.λ. θα έχει το πολύ $m+n-1 = 4+3-1 = 6$ θετικές συνιστώσες.

Βρίσκουμε μια αρχική βελ με τη μέθοδο του ελαχίστου στοιχείου

Περιοχή \ Σχολείο	1	2	3	a_i
1	0 (5)	0 (2)	120 (1)	~~120~~ 0
2	0 (4)	240 (3)	0 (4)	~~240~~ 0
3	200 (2)	0 (4)	250 (7)	~~450~~ ~~250~~ 0
4	0 (3)	160 (3)	30 (6)	~~190~~ ~~30~~ 0
b_j	~~200~~ 0	~~400~~ ~~160~~ 0	~~400~~ ~~200~~ ~~250~~	1000

. Βρίσκω το κελί με το ελάχιστο c_{ij} (στο 1ο βήμα είναι το $c_{13} = 1$) και βάζω $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ (εδώ $x_{13} = 120$). Ενημερώνω τα a_i, b_j και βάζω $x_{ij} = 0$ (εδώ $x_{11} = x_{12} = 0$) στα υπόλοιπα κελιά της γραμμής ή της στήλης που μηδενίστηκε το a_i ή το b_j. Κάνω το ίδιο για τα υπόλοιπα τετράγωνα.

άρα έχω μη εκφυλισμένη αρχική βελ. με $x_{13} = 120$, $x_{22} = 240$, $x_{31} = 200$, $x_{33} = 250$, $x_{42} = 160$, $x_{43} = 30$ (αφού έχει 6 θετικές συνιστώσες) και $x_{ij} = 0$ για i, j διαφορ.

με κόστος $R_0 = 1 \cdot 120 + 3 \cdot 240 + 2 \cdot 200 + 7 \cdot 250 + 3 \cdot 160 + 6 \cdot 30 = 3.650$ €

Ελέγχω αν η λύση είναι άριστη από τη μέθοδο των δυναμικών.

Ξαναγράφω το tableau μεταφοράς με την αρχική βελ., βρίσκοντας τα δυναμικά u_1, u_2, u_3, u_4 και v_1, v_2, v_3

$u_i \backslash v_j$	$v_1=-4$	$v_2=-2$	$v_3=1$	a_i
$u_1=0$	-9) 5 0	-4) 2 0	1 120	120
$u_2=5$	-3) 4 0	3 240 −	2) 4 + 0	240
$u_3=6$	2 200	0) 4 0	7 250	450
$u_4=5$	-2) 3 0	3 160 +	6 30 −	190
b_j	200	400	400	1000

1) Εύρεση των u_i, v_j. Για τα βασικά τετράγωνα (αυτά με $x_{ij}>0$) ικανοποιώ την $u_i+v_j=c_{ij}$, για $u_1=0$.

2) Εύρεση των δ_{ij}. Στα μη βασικά (αυτά με $x_{ij}=0$) υπολογίζω τις διαφορές $\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$, τις οποίες και σημειώνω στην πάνω αριστερή γωνία του τετραγώνου.

$\exists\, \delta_{23}=2>0$ άρα η λύση δεν είναι άριστη.

Κατασκευή καλύτερης βελ.

$\delta_{23}=2 \Rightarrow$ οδηγός το δ_{23}.

$\theta_0=\min(240,30)=30$

άρα η επόμενη καλύτερη βελ. δίνεται στο επόμενο tableau μεταφοράς με κόστος $R_1=R_0-\delta_{23}\theta_0=3650-2\cdot 30=3590$. Ελέγχω αν είναι άριστη όπως παραπάνω.

$u_i \backslash v_j$	$v_1=4$	$v_2=0$	$v_3=1$	a_i
$u_1=0$	-9) 5 0	-2) 2 0	1 120	120
$u_2=3$	-5) 4 0	3 210 −	4 + 30	240
$u_3=6$	2 200	2) 4 0 +	7 250 −	450
$u_4=3$	-4) 3 0	3 190	-2) 6 0	190
b_j	200	400	400	1000

άρα η λύση δεν είναι άριστη γιατί $\delta_{32}=2$.

$\Rightarrow$ οδηγός το δ_{32}

$\Rightarrow \theta_0=\min(210,250)=210$

άρα η επόμενη βελ.

έχει κόστος $R_2 = 3590 - 2 \cdot 210 = 3170$

	$v_1=-4$	$v_2=-2$	$v_3=1$	d_i
$u_1=0$	(-9) 5 / 0	(-4) 2 / 0	1 / 120	120
$u_2=3$	(-5) 4 / 0	(-5) 3 / 0	4 / 240	240
$u_3=6$	2 / 200	4 / 210 +	7 / 40 −	450
$u_4=5$	(-2) 3 / 0	3 / 190 −	0) 6 / 0 +	190
b_j	200	400	400	1000

άρα η λύση $\underline{x}_2$ είναι
$x_{13}=120$, $x_{23}=240$
$x_{31}=200$, $x_{32}=210$, $x_{33}=40$
$x_{42}=190$, $x_{ij}=0$ υπόλοιπα
είναι αρίστη διότι $\delta_{ij} \le 0$ για κάθε (i,j) μη βασικό τετράγωνο.

Επειδή $\delta_{43}=0$ υπάρχει και εναλλακτική άριστη λύση $\underline{x}_3$ με κόστος $R_3 = R_2 = 3170$ €. Για να τη βρούμε αρκεί το μη βασικό τετράγωνο $(4,3)$ να γίνει βασικό με τη μέθοδο βελτίωσης από τη μέθοδο των διαδοχικών δηλ. $\theta_0 = \min(190, 40) = 40$

και η $\underline{x}_3$ προκύπτει στο παρακάτω tableau.

	v_1	v_2	v_3	d_i
u_1	5 / 0	2 / 0	1 / 120	120
u_2	4 / 0	3 / 0	4 / 240	240
u_3	2 / 200	4 / 250	7 / 0	450
u_4	3 / 0	3 / 0	6 / 40	190
d_i	200	400	400	1000

και άρα το πρόβλημα έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις της μορφής $\underline{x}^* = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$, $\lambda \in [0,1]$

και κόστος $R = 3170$ €

(2) Εδώ το πρόβλημα μεταφοράς δεν είναι ισορροπημένο

καθώς η προσφορά $\sum_{i=1}^{2} a_i = 200+200 = 400$ υπολείπεται

της ζήτησης $\sum_{j=1}^{3} b_j = 180+170+150 = 500$

και άρα παρατηρούνται ελλείψεις στην αγορά.

Για να γίνει το πρόβλημα ισορροπημένο, θεωρούμε νέα πηγή-αποθήκη Γ με διαθέσιμη ποσότητα $a_3 = \sum b_j - \sum a_i = 500-400 = 100$ και κόστη μεταφοράς c_{3j} τα αντίστοιχα κόστη ελλείψεων δηλ. 6, 6, και 5 αντίστοιχα.

Το νέο πρόβλημα είναι ισορροπημένο και η αρχική βεδ θα πρέπει να έχει το πολύ $m+n-1 = 6-1 = 5$ θετικές συνιστώσες

Μέθοδος Ελαχίστου Στοιχείου - Εύρεση Αρχικής βεδ

Αποθ \ Πελ	1	2	3	
A	8 / 30	9 / 170	4 / 0	~~200~~ ~~170~~ 0
B	5 / 50	12 / 0	2 / 150	~~200~~ ~~50~~ 0
Γ	6 / 100	6 / 0	5 / 0	~~100~~ 0
	~~180~~ ~~130~~ ~~30~~ 0	~~170~~ 0	~~150~~ 0	500

$\min c_{ij} = 2 = c_{23}$

$x_{23} = \min(200, 150) = 150$

$\Rightarrow x_{13} = x_{33} = 0$

άρα έχω μη εκφυλισμένη αρχική βεδ γιατί έχει 5 θετικές συνιστώσες

με κόστος $z_0 = 2920$

Μέθοδος Δυναμικών

$u_i \backslash v_j$	$v_1=8$	$v_2=9$	$v_3=5$	d_i
$u_1=0$	8 / 30	9 / 170	(1) 4 / 0	200
$u_2=-3$	5 / 50	(−6) 12 / 0	2 / 150	200
$u_3=-2$	6 / 100	(1) 6 / 0	(−2) 5 / 0	100
b_j	180	170	150	500

Βρίσκω u_i, v_j από την $u_i+v_j=c_{ij}$ για τα βασικά (i,j)

Θέτοντας $u_1=0$

Βρίσκω τις διαφορές

$\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ στα μη βασικά (i,j)

Επειδή $\delta_{13}=1$ και $\delta_{32}=1$ η αρχική βελ. δεν είναι άριστη άρα στη νέα βελ.:

οδηγός είναι το δ_{13}

$\theta_0=\min(30,150)=30$

και το αντίστοιχο κόστος θα είναι

οι διαφορές είναι ίσες και άρα επιλέγω αυθαίρετα, διαφορετικά επιλέγω ως οδηγό την μεγαλύτερη.

$$R_1=R_0-\theta_0\delta_{13}=2920-1\cdot 30=2890$$

$u_i \backslash v_j$	$v_1=7$	$v_2=9$	$v_3=4$	d_i
$u_1=0$	(−1) 8 / 0	9 / 170	4 / 30	200
$u_2=-2$	5 / 80	(−5) 12 / 0	2 / 120	200
$u_3=-1$	6 / 100	(2) 6 / 0	(−2) 5 / 0	100
b_j	180	170	150	500

Επειδή $\delta_{32}=2>0$ η λύση x_1 δεν είναι άριστη και άρα η νέα βελ. θα έχει οδηγό το δ_{32} με

$\theta_1=\min(100,120,170)=100$

και το συνολ. κόστος της θα είναι $R_2=R_1-\theta_1\delta_{32}=2890-200$
$=2690$

$u_i \backslash v_j$	$v_1=7$	$v_2=9$	$v_3=4$	a_i
$u_1=0$	(−1) 8 0	9 70	4 130	200
$u_2=-2$	5 180	(−5) 12 0	2 20	200
$u_3=-3$	(−2) 6 0	6 100	(−4) 5 0	100
b_j	180	170	150	

άρα η $\underline{x}_2$ είναι άριστη, αφού $\delta_{ij} \le 0$

με κόστος $Z_2 = 2690$.

3. Το αντίστοιχο tableau μεταφοράς για το αρχικό πρόβλημα που είναι ισορροπημένο είναι το παρακάτω

Βιοτεχν. \ Καταστ.	k_1	k_2	k_3	a_i
B_1	15 x_{11}	18 x_{12}	16 x_{13}	200
B_2	17 x_{21}	13 x_{22}	20 x_{23}	300
b_j	250	160	90	500

Επειδή το k_1 μειώνει την απαίτηση του σε 220 μονάδες το πρόβλημα δεν είναι πλέον ισορροπημένο και ως $\sum_{i=1}^{2} a_i = 500 > 470 = \sum_{j=1}^{3} b_j$ και άρα δημιουργείται 4ο καταναλωτής k_4 (αποθήκη) με απαίτηση 30 μονάδες και κόστη μεταφοράς $c_{i4} = 50$ € για κάθε i. (μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης)

Τότε το νέο tableau μεταφοράς είναι

βιοτεχνία \ καταστήματα	k_1	k_2	k_3	k_4	a_i
B_1	15 x_{11}	18 x_{12}	16 x_{13}	50 x_{14}	200
B_2	14 x_{21}	13 x_{22}	20 x_{23}	50 x_{24}	300
b_j	220	160	90	30	

Αν x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από την βιοτεχνία B_i στο κατάστημα k_j τότε η διαμόρφωση του προβλήματος σε ΠΓΠ έχει ως εξής:

$$\min\left(15x_{11} + 13x_{12} + 16x_{13} + 50x_{14} + 14x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23} + 50x_{24}\right)$$

υ.π

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300$$

$$x_{11} + x_{21} = 220$$

$$x_{12} + x_{22} = 160$$

$$x_{13} + x_{23} = 90$$

$$x_{14} + x_{24} = 30$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1,2 \text{ και } j = 1,2,3,4$$

(4) Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι μονάδες είναι ανά χίλια €

Πηγές είναι τα είδη ομολόγων με $\sum_{i=1}^{3} a_i = 150+40+60 = 250$ χιλ.€

Προορισμοί είναι οι μήνες εξόφλησης με απαιτήσεις $\sum_{j=1}^{4} b_j = 250$ χιλ.€,

και κόστη μεταφοράς οι αντίστοιχες τιμές προεξόφλησης (είδος, μήνα)

και μεταφερόμενη ποσότητα x_{ij} = ποσό προεξοφλούμενο από το είδος i για πληρωμή μήνα j

Άρα έχουμε ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς και μια

αρχική του βασική εφικτή λύση $3+4-1=6$ θετικές συνιστώσες

Μέθοδος ελαχίστου στοιχείου

Ομόλογα \ Μήνες	1	2	3	4	
Δημ.	100 (250)	50 (200)	0 (150)	0 (100)	~~150~~ ~~100~~ 0
Τραπ.	0 (200)	30 (150)	10 (120)	0 (80)	~~40~~ ~~30~~ 0
Βιομηχ.	0 (150)	0 (100)	40 (80)	20 (50)	~~60~~ ~~40~~ 0
	~~100~~ 0	~~80~~ ~~50~~ 0	~~50~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	250

.1000€

.1000 €

αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ.

με κόστος προεξόφλησης $R_0 = 76.400€$ (Η τιμή της προεξόφλησης δίνεται ανά 1000€ προεξόφλησης)

Μέθοδος Δυναμικών

$u_i \backslash v_j$	$v_1=250$	$v_2=200$	$v_3=170$	$v_4=140$	d_i
$u_1=0$	250 / 100	200 / 50 −	20) 150 / 0	40) 100 + / 0	150
$u_2=-50$	0) 200 / 0	150 / 30 +	120 / 10 −	10) 80 / 0	40
$u_3=-90$	10) 150 / 0	10) 100 / 0	80 / 40 +	50 / 20 −	60
b_j	100	30	50	20	250

Επειδή $\exists\, \delta_{ij} > 0$ η $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη. Για τη νέα βελτίωση

$\max\{\delta_{ij} > 0\} = \max\{20, 40, 10, 10, 10\} = 40$

άρα οδηγός η $\delta_{14} = 40$ με $\theta_0 = \min(50, 10, 20) = 10$

άρα η νέα βελτ. έχει κόστος $R_1 = R_0 - \delta_{14}\theta_0 = 76400 - 400 = 76000$

και δίνεται στο παρακάτω tableau

$u_i \backslash v_j$	$v_1=250$	$v_2=200$	$v_3=130$	$v_4=100$	d_i
$u_1=0$	250 / 100	−200 / 40	−20) 150 / 0	100 + / 10	150
$u_2=-50$	0) 200 / 0	150 / 40	−40) 120 / 0	−60) 80 / 0	40
$u_3=-50$	50) 150 / 0	50) 100 / 0 +	80 / 50	50 / 10 −	60
b_j	100	30	50	20	250

Επειδή $\delta_{31} = \delta_{32} = 50 \geq 0$ η λύση $\underline{x}_1$ δεν είναι άριστη και επιλέγω ως οδηγό μία οποιαδήποτε, έστω $\delta_{32} = 50$ και $\theta_1 = \min(10, 40) = 10$. άρα η νέα βελτ. θα έχει κόστος $R_2 = 76000 - 500 = 75500$.

$R_2 = R_1 - \delta_{32}\theta_1 = 76000 - 500 = 75.500$

και θα δίνεται στο επόμενο tableau

$u_i \backslash v_j$	$v_1=250$	$v_2=200$	$v_3=180$	$v_4=100$	a_i
$u_1=0$	250 / 100	− 200 / 30	30) + 150 / 0	100 / 20	150
$u_2=-50$	0) 200 / 0	150 / 40	10) 120 / 0	-30) 80 / 0	40
$u_3=-100$	0) 150 / 0	100 / 10 +	80 / 50 −	-50) 50 / 0	60
b_j	100	80	50	20	250

$\delta_{ij} = \max(30,10) = 30$

⇒ οδηγός η $\delta_{13} = 30$

και $\theta_0 = \min(30,30) = 30$

άρα $R_3 = 75500 - 30\cdot 30$

$= 74.600$

και η νέα βελ δίνεται στο παρακάτω tableau

$u_i \backslash v_j$	$v_1=250$	$v_2=170$	$v_3=150$	$v_4=100$	a_i
$u_1=0$	− 250 / 100	-30) 200 / 0	+ 150 / 30	100 / 20	150
$u_2=-20$	30) + 200 / 0	− 150 / 40	10) 120 / 0	0) 80 / 0	40
$u_3=-70$	30) 150 / 0	100 / 40 +	80 / 20 −	-20) 50 / 0	60
b_j	100	80	50	20	250

$\delta_{ij} = \max(30,30,10) = 30$

⇒ επιλέγω αυθαίρετα οδηγός η $\delta_{21} = 30$

και $\theta_0 = \min(100,40,20) = 20$

άρα $R_4 = 74600 - 30\cdot 20$

$= 74000$

$u_i \backslash v_j$	$v_1=250$	$v_2=200$	$v_3=150$	$v_4=100$	a_i
$u_1=0$	250 / 80	0) 200 / 0	150 / 50	100 / 20	150
$u_2=-50$	200 / 20	150 / 20	-20) 120 / 0	-30) 80 / 0	40
$u_3=-100$	0) 150 / 0	100 / 60	-30) 80 / 0	-50) 50 / 0	60
b_j	100	80	50	20	250

και η $\underline{X}_4$ είναι άριστη αφού $\delta_{ij} \le 0 \ \forall (i,j)$

Επειδή $\delta_{12} = \delta_{31} = 0$ υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση την οποία και βρίσκω κάνοντας βασικό τετράγωνο ένα από τα δύο, και ξανακάνω τη μέθοδο των δυναμικών.