(5) Για αυτό το πρόβλημα μεταφοράς ισχύει

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100+80+50=230$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 40+80+50+60=230$$

άρα το πρόβλημα είναι ισορροπημένο και μία βασική εφικτή λύση (β.ε.λ) θα έχει το πολύ

$m+n-1 = 3+4-1 = 6$ θετικές συνιστώσες

Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου (για την εύρεση αρχικής βελ)

	1	2	3	4	a_i
A_1	75 / 0	90 / 0	65 / 60	70 / 40	~~100~~ ~~40~~ 0
A_2	63 / 40	72 / 40	74 / 0	75 / 0	~~80~~ ~~40~~ 0
A_3	74 / 0	83 / 40	75 / 0	83 / 10	~~50~~ 0
b_j	~~40~~ 0	~~80~~ ~~40~~ 0	~~60~~ 0	~~50~~ ~~10~~ 0	230

Η αρχική βελ είναι μη εκφυλισμένη γιατί έχει ακριβώς 6 θετικές συνιστώσες και συνολικό κόστος $R_0 = 16.500$

Μέθοδος Δυναμικών (για τον έλεγχο βελτιστότητας)

$u_i \backslash v_j$	$v_1=61$	$v_2=70$	$v_3=65$	$v_4=70$	a_i
$u_1=0$	(−14) 75 / 0	(−20) 90 / 0	65 / 60 −	70 / 40 +	100
$u_2=2$	63 / 40	72 / 40	(−7) 74 / 0	(−3) 75 / 0	80
$u_3=13$	(5) 74 / 0	83 / 40	(8) 75 / 0 +	83 / 10 −	50
b_j	40	80	60	50	230

Η x_0 δεν είναι άριστη.

οδηγός η $s_{33} = 8$

και $\theta_0 = \min(10, 60) = 10$

άρα $R_1 = 16500 - 8 \cdot 10 = 16420$

$u_i \backslash v_j$	$v_1=69$	$v_2=78$	$v_3=65$	$v_4=70$	a_i
$u_1=0$	(-6) 75 / 0	(-12) 90 / 0	65 / 50	70 / 50	100
$u_2=-6$	63 / 40 −	72 / 40 +	(-15) 74 / 0	(-11) 75 / 0	80
$u_3=10$	(5) 74 / 0 +	83 / 40 −	75 / 10	(-8) 88 / 0	50
b_j	40	80	60	50	230

1η) x_1 δεν είναι άριστη.
οδηγός ο $\delta_{31}=5$
και $\theta_0=\min(40,40)=40$
με νέο ολικό κόστος
$R_2=16420-5\cdot 40$
$=16220.$

$u_i \backslash v_j$	$v_1=64$	$v_2=73$	$v_3=65$	$v_4=70$	a_i
$u_1=0$	(-11) 75 / 0	(-17) 90 / 0	65 / 50	70 / 50	100
$u_2=-1$	63 / 0*	72 / 80	(-10) 74 / 0	(-6) 75 / 0	80
$u_3=10$	74 / 40	(-5) 83 / 0	75 / 10	(-8) 88 / 0	50
b_j	40	80	60	50	230

Η νέα βελ x_2 είναι εκφυλισμένη διότι έχει 5 θετικές συνιστώσες. Αφαιρώ ένα από τα δύο βασικά τετράγωνα που μηδενίστηκαν, το βασικό σημειώνοντάς το με *, εδώ το (2,1)

Παρατηρώ ότι $\delta_{ij}<0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα. Άρα η x_2 είναι άριστη εκφυλισμένη (μοναδική) λύση του προβλήματος με ολικό κόστος $R_2=16220$

7 (i) Για αυτό το πρόβλημα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 50 < 60 = \sum_{j=1}^{3} b_j$$

Άρα υπάρχει ελλείψεις στην ζήτηση και εισάγουμε υποθετική αποθήκη Γ με διαθέσιμη ποσότητα $a_3 = \sum b_j - \sum a_i = 10$ και κόστος μεταφοράς c_{3j} το αντίστοιχο κόστος ελλείψεων που είναι $c_{3j} = 100 \ \forall j$. Το νέο πρόβλημα είναι ισοφαρισμένο και μια β.ε.λ. έχει το πολύ $m+n-1 = 5$ θετικές συνιστώσες

Μέθοδος Ελάχιστου Στοιχείου

	1	2	3	a_i
A	15 / 0	35 / 10	25 / 20	~~35~~ ~~10~~ 0
B	10 / 20	50 / 0*	40 / 0	~~20~~ 0
Γ	100 / 0	100 / 10	100 / 0	~~10~~ 0
b_j	~~20~~ 0	~~20~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	60

Αφού $a_2 = b_1 = 20$, το πρόβλημα έχει εκφυλισμένες λύσεις και άρα μια βελ μπορεί να έχει λιγότερες από 5 θετικές συνιστώσες

Εδώ η αρχική βελ είναι εκφυλισμένη καθώς έχει 4 θετικές συνιστώσες. Κάνω βασική μια από τις μη βασικές μεταβλητές της 2ης γραμμής ή της 2ης στήλης που αντιστοιχούν στις ίσες ποσότητες $a_2 = b_1 = 20$ απ' τις οποίες προήλθε ο εκφυλισμός. Αυτή η μεταβλητή σημειώνεται με * στο τετράγωνό της και δηλώνει ότι είναι βασικό τετράγωνο. Το συνολικό κόστος της αρχικής βελ.

$\underline{x}_0$ είναι $R_0 = 2050$.

Μέθοδος Δυναμικών

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = -5$	$v_2 = 35$	$v_3 = 25$	a_i
$u_1 = 0$	-20) 15 0	35 10	25 20	30
$u_2 = 15$	10 20	50 0^*	0) 40 0	20
$u_3 = 65$	-40) 100 0	100 10	-10) 100 0	10
b_j	20	20	20	60

Παρατηρούμε ότι $\delta_{ij} \le 0 \ \forall (i,j)$ και άρα η $\underline{x}_0$ είναι άριστη

Επειδή $\delta_{ij} = 0$ υπάρχει και εναλλακτική άριστη λύση.

(ii) Στο πρόβλημα αυτό υποθέτουμε δύο επιπλέον αποθήκες Γ και Δ με διαθέσιμες ποσότητες $a_3 = a_4 = 10$ και κόστος μεταφοράς ίσο με το κόστος μεταφοράς άλλης αποθήκης A, B στους πελάτες 1, 2, 3 αντίστοιχα αυξημένο κατά 100 μονάδες.

Για αυτό το πρόβλημα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 70 > 60 = \sum_{j=1}^{3} b_j$$

Άρα το πρόβλημα δεν είναι ισορροπημένο και άρα υποθέτουμε επιπλέον πελάτη απορροφητή με απαιτούμενη ποσότητα $b_4 = 10$.

και κόστος μεταφοράς $c_{i4}=0 \;\; \forall i$

Το νέο πρόβλημα είναι ισορροπημένο και μια βελ θα έχει το πολύ $m+n-1 = 4+4-1 = 7$ θετικές συνιστώσες

	1	2	3	4	a_i
A	15 / 0	35 / 10	25 / 20	0 / 0	~~30~~ ~~10~~ 0
B	10 / 20	50 / 0*	40 / 0	0 / 0	~~20~~ 0
Γ	115 / 0	135 / 10	125 / 0	0 / 0*	~~10~~ 0
Δ	110 / 0	160 / 0	140 / 0	0 / 10	~~10~~ 0
b_j	~~20~~ 0	~~20~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~10~~ 0	70

Όπως και στο (i), επειδή $a_4 = b_4 = 10$ η αρχική βελ είναι εκφυλισμένη και άρα θα έχει λιγότερες από 7 θετικές συνιστώσες. Σημειώνω με * ένα άλλο μη βασικό τετράγωνο της 4ης γραμμής ή της 4ης στήλης (εδώ το (3,4)) για να το δηλώσουμε ως βασικό. Όμοια για $a_2 = b_2 = 20$, σημειώνω με * το (2,2)

Άρα η αρχική βελ x_0 είναι εκφυλισμένη καθώς έχει 5 θετικές συνιστώσες με συνολικό κόστος $Z_0 = 2400$

Μέθοδος Δυναμικών

$u_i \backslash v_j$	$v_1=5$	$v_2=35$	$v_3=25$	$v_4=-100$	d_i
$u_1=0$	-20) 15 0	35 10	25 20	-115) 0 0	30
$u_2=15$	10 20	50 0*	0) 40 0	-100) 0 0	20
$u_3=100$	-5) 115 0	135 10	0) 125 0	0 0*	10
$u_4=100$	-15) 110 0	-15) 160 0	-15) 140 0	0 10	10
b_j	20	20	20	10	70

Αφού $\delta_{ij} \le 0 \ \forall (i,j)$ μη βασικό $\Rightarrow \underline{x}_0$ είναι άριστη

Επίσης υπάρχουν εναλλακτικές άριστες λύσεις καθώς $\delta_{23} = \delta_{33} = 0$. Τις οποίες και βρίσκω κάνοντας βασικό το τετράγωνο (3,3) με τη γνωστή μέθοδο βελτίωσης

8

Θεωρούμε τις αποθήκες A και B όπου γίνεται η μεταφόρτωση ως σταθμούς παραγωγής και προορισμού ταυτόχρονα με συνολική απαίτηση για τις A, B όση ποσότητα πάει σε κάθε μία από αυτές και συνολική διαθεσιμότητα των A, B όση ποσότητα φεύγει από κάθε μία από τις A, B αντίστοιχα

Άρα οι A, B διαθέτουν ποσότητες

$$a_4 = a_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 260 + 340 = 800 \text{ μονάδες}$$

όση και η συνολική παραγωγή ενώ και $b_5 = b_6 = 800$

γιατί η συνολική παραγωγή είναι ίση της συνολικής κατανάλωσης

Άρα $$\sum_{i=1}^{5} a_i = 800 + 800 + 800 = 2400$$

$$\sum_{j=1}^{6} b_j = 300 + 240 + 160 + 100 + 800 + 800 = 2400$$

Άρα το πρόβλημα είναι ισορροπημένο και μια β.ε.λ. θα έχει το πολύ $m+n-1 = 5+6-1 = 10$ θετικές συνιστώσες

	1	2	3	4	A	B	d_i
1	4 / 40	6 / 100	8 / 0	12 / 0	3 / 0	2 / 0	~~200~~ ~~160~~ 0
2	2 / 260	5 / 0	7 / 0	4 / 0	4 / 0	1 / 0*	~~260~~ 0
3	6 / 0	9 / 80	13 / 160	8 / 100	2 / 0	5 / 0	~~340~~ ~~240~~ ~~160~~ 0
A	4 / 0*	7 / 0	5 / 0	11 / 0	0 / 800	10 / 0	~~800~~ 0
B	3 / 0	8 / 0	6 / 0	9 / 0	10 / 0	0 / 800	~~800~~ 0
b_j	~~300~~ ~~40~~ 0	~~240~~ ~~80~~ 0	~~160~~ 0	~~100~~ 0	~~800~~ 0	~~800~~ 0	2400

Επειδή $\alpha_4=\beta_4$ και $\alpha_5=\beta_5$ η βελ. είναι εκφυλισμένη και σημειώνω με * μη βασικά τετράγωνα της 4ης γραμμής ή 4ης στήλης (εδώ το (4,1)) και της 5ης γραμμής ή 5ης στήλης (εδώ το (2,5))

Η αρχική βελ. είναι εκφυλισμένη με 8 θετικές συνιστώσες και έχει συνολικό κόστος $R_0 = 3160 + 13\cdot 160 = 5240$

Προχωράμε στη μέθοδο των δυναμικών για τον έλεγχο της βελτιστότητας

$u_i \backslash v_j$	$v_1=4$	$v_2=6$	$v_3=10$	$v_4=5$	$v_5=0$	$v_6=3$	d_i
$u_1=0$	4 40 +	6 160 −	2) 8 0	-7) 12 0	-3) 3 0	1) 2 0	200
$u_2=-2$	2 260	-1) 5 0	1) 7 0	-1) 4 0	-6) 4 0	1 0*	260
$u_3=3$	1) 6 0	9 80 +	13 160 −	8 100	1) 2 0	1) 5 0	340
$u_4=0$	4 0* −	-1) 7 0	5) 5 0 +	-6) 11 0	800 0	-7) 10 0	800
$u_5=-3$	-2) 3 0	-5) 8 0	1) 6 0	-7) 9 0	-13) 10 0	800	800
b_j	300	240	160	100	800	800	2400

αρα η $\underline{x}_0$ δεν ειναι αριστη και οδηγός η $\delta_{43}=5$ που αντιστοιχει στη μεγαλυτερη θετική διαφορά.

Επίσης $\theta_0 = \min(0, 160, 100) = 0$ αρα η βελ παραμένει η ίδια με κόστος το R_0. Αλλάζει μόνο το μη βασικό τετράγωνο που διαλέξαμε βασικό. Στο επόμενο tableau θα γίνει βασικό το (4,3) αντί του (4,1).

$u_i \backslash v_j$	$v_1=4$	$v_2=6$	$v_3=10$	$v_4=5$	$v_5=5$	$v_6=3$	a_i
$u_1=0$	4 / 40	6 / 160	2) 8 / 0	-7) 12 / 0	2) 3 / 0	1) 2 / 0	200
$u_2=-2$	2 / 260	-1) 5 / 0	1) 7 / 0	-1) 4 / 0	-1) 4 / 0	1 / 0*	260
$u_3=3$	1) 6 / 0	9 / 80	− 13 / 160	8 / 100	6) 2 + / 0	1) 5 / 0	340
$u_4=-5$	-5) 4 / 0	-6) 7 / 0	5 / 0* +	-11) 11 / 0	0 − / 800	-12) 10 / 0	800
$u_5=-3$	-2) 3 / 0	-5) 3 / 0	1) 6 / 0	-7) 9 / 0	-8) 10 / 0	0 / 800	800
b_j	300	240	160	100	800	800	2400

Εδώ δηλαδή η $\delta_{35}=6$ και $\theta_0=\min(160,800)=160$ άρα η νέα βελτ. έχει συνολικό κόστος $R_1 = 5240 - 6\cdot 160 = 4280$ και δίνεται στο επόμενο tableau

$u_i \backslash v_j$	$v_1=4$	$v_2=6$	$v_3=4$	$v_4=5$	$v_5=-1$	$v_6=3$	a_i
$u_1=0$	− 4 / 40	+ 6 / 160	-4) 8 / 0	-7) 12 / 0	-4) 3 / 0	1) 2 / 0	200
$u_2=-2$	2 / 260	-1) 5 / 0	-5) 7 / 0	-1) 4 / 0	-7) 4 / 0	1 / 0*	260
$u_3=3$	1) 6 / 0 +	9 / 80 −	-6) 13 / 0	8 / 100	2 / 160	1) 5 / 0	340
$u_4=1$	1) 4 / 0	0) 7 / 0	5 / 160	-5) 11 / 0	0 / 640	-6) 10 / 0	800
$u_5=-3$	-4) 3 / 0	-11) 8 / 0	-7) 6 / 0	-11) 9 / 0	-14) 10 / 0	0 / 800	800
b_j	300	240	160	100	800	800	

Συνεχίζουμε πάλι μέχρι να βρεθεί άριστη λύση