ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΤΟ ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ

Αναμόρφωση του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών με έμφαση στην Πληροφορική, τη Διδακτική και τις Εφαρμογές των Μαθηματικών.

Σημειώσεις για το μάθημα της

Επιχειρησιακής Έρευνας

Διδάσκοντες : **Α. Μπουρνέτας**
Δ. Φακίνος

Τις σημειώσεις επιμελήθηκαν οι : **Σπ. Κάντα**
Στ. Καποδίστρια

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γραμμικός Προγραμματισμός

1.1 Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Έστω ένα π.γ.π. σε μορφή πινάκων

$$z = \max \underline{c}' \, \underline{x}$$
$$A \, \underline{x} \leq, =, \geq \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}.$$

Ορισμός 1 *Ένα π.γ.π. είναι σε κανονική μορφή αν έχει τη μορφή*

$$(\pm) \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \tag{1.1}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

όπου $c_j,\ b_i,\ a_{ij}$ *πραγματικές σταθερές και επιπλέον* $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$. *Ισοδύναμα, σε μορφή πινάκων:*

$$z = \max \underline{c}' \ \underline{x}$$
$$A\ \underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in M_{n\times 1}$, $\underline{b} \in M_{m\times 1}$ *και* $\underline{b} \geq \underline{0}$.

Κάθε π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών.

i. Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

   Χρησιμοποιούμε τη σχέση
$$\min f(\underline{x}) = -\max(-f(\underline{x})).$$

ii. Αρνητικοί όροι σε περιορισμούς

   Αυτοί μετατρέπονται σε θετικούς, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1).

iii. Περιορισμοί που εκφράζονται από ανισώσεις

   Αυτοί μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις εισάγοντας νέες μη αρνητικές μεταβλητές, που λέγονται περιθώριες μεταβλητές. Έτσι οι αρχικοί περιορισμοί

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

   είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_r = b_i,\ x_r \geq 0$$
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - x_s = b_j,\ x_s \geq 0.$$

iv. Μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο ή μη θετικές

Αν η μεταβλητή x_i δεν υπόκειται στον περιορισμό $x_i \geq 0$, αλλά είναι $x_i \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x_i = x_i' - x_i''$, όπου $x_i', x_i'' \geq 0$. Αν η μεταβλητή x_j είναι μη θετική, θέτουμε $x_j = -x_j'$, όπου $x_j' \geq 0$.

1.2 Ο αλγόριθμος Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι η απλούστερη και ευκολότερη μέθοδος για την εύρεση της άριστης λύσης ενός π.γ.π. Για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex, πρέπει

i. Το π.γ.π. να είναι σε κανονική μορφή.

ii. Να είναι γνωστή μία (αρχική) μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$.

Τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου Simplex μπορούν να εκτελεστούν πιο εύκολα με τη βοήθεια μιας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί ως tableau Simplex. Ο αλγόριθμος Simplex θα αναπτυχθεί κάνοντας την υπόθεση ότι ο πίνακας A περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I, ο οποίος δίνει την πρώτη βάση. Τότε η αρχική βασική εφικτή λύση δίνεται από το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων. Θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο αναλυτικά μέσω ενός παραδείγματος.
Αρχικά η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι

$$\begin{array}{cccccc} \max & (15x_1 & + & 10x_2) & & \\ & \frac{1}{4}x_1 & + & x_2 & \leq & 65 \\ & \frac{5}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 90 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 85 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Με βάση τους κανόνες που περιγράψαμε παραπάνω μετατρέπουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή, όπως απαιτείται για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές και $\underline{b} > \underline{0}$. Έτσι, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να προσθέσουμε από μία περιθώρια μεταβλητή σε κάθε περιορισμό ώστε να γίνουν όλοι ισότητες.

Έτσι το πρόβλημα αποκτά τη μορφή

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & (15x_1 & + & 10x_2) & & & & & & & & & \\
& \frac{1}{4}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 65 \\
& \frac{5}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & & & = & 90 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 85 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0 &
\end{array}$$

Παρατηρούμε πως σχηματίζεται ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και άρα μια πρώτη βασική εφικτή λύση θα δοθεί ως $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 65,\ x_4 = 90,\ x_5 = 85$.

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex ως εξής:

Στην πρώτη στήλη αναγράφονται οι βασικές στήλες που είναι αυτές που σχηματίζουν το μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή οι $P_3,\ P_4$ και P_5 με τη σειρά που τον σχηματίζουν. Στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις τιμές των αντίστοιχων συντελεστών κέρδους, δηλαδή τους συντελεστές με τους οποίους οι βασικές μεταβλητές εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση ($c_3,\ c_4$ και c_5 που είναι όλοι 0). Στην τρίτη στήλη βάζουμε τη βασική εφικτή λύση που έχουμε, δηλαδή τα στοιχεία του $\underline{b}$. Στη συνέχεια βάζουμε τα στοιχεία του πίνακα A ενώ η τελευταία στήλη του tableau αφήνεται προσωρινά κενή. Στην τελευταία γραμμή αναγράφεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική λύση (z_0) καθώς και οι διαφορές $z_k - c_k$, οι οποίες υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο της δεύτερης στήλης, c_B, με την k-οστή στήλη του A, P_k, μείον το αντίστοιχο c_k(δηλ. $\underline{c}'_B\ P_k - c_k$). π.χ. $z_0 = 0 \cdot 65 + 0 \cdot 90 + 0 \cdot 85 = 0$, $z_1 - c_1 = (0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{5}{4} + 0 \cdot 1) - 15 = -15$.
Έτσι το πρώτο tableau γίνεται

			15	10	0	0	0	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_3	0	65	$\frac{1}{4}$	1	1	0	0	
P_4	0	90	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
P_5	0	85	1	1	0	0	1	
	z	0	-15	-10	0	0	0	

Παρατήρηση 1 *Κάτω από τις βασικές στήλες οι διαφορές $z_k - c_k$ πρέπει να προκύπτουν πάντα 0.*

Ελέγχουμε αν η λύση που έχουμε είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές $z_k - c_k$.

i. Αν $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k, η λύση είναι άριστη.

ii. Αν $z_j - c_j < 0$ για κάποιο j και $x_{ij} \leq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.

iii. Αν καμία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις δεν ισχύουν, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα j τέτοιο ώστε $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} > 0$ για ένα τουλάχιστον i. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε στην τελευταία στήλη τους λόγους των στοιχείων της στήλης $\underline{b}$ με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της στήλης $\underline{P}_j$. Η στήλη $\underline{P}_i$ φεύγει από τη βάση και στη θέση της μπαίνει η $\underline{P}_j$.

Έτσι στο παράδειγμά μας, από τις διαφορές $z_k - c_k$ υπάρχουν δύο αρνητικές. Άρα η λύση που έχουμε δεν είναι άριστη και είμαστε στην τρίτη περίπτωση από αυτές που αναφέραμε παραπάνω. Επιλέγουμε την πιο μικρή από τις διαφορές (το -15), δηλαδή τη στήλη $\underline{P}_1$. Στη συνέχεια, στην τελευταία στήλη του tableau (στήλη θ) γράφουμε τους λόγους των στοιχείων της στήλης $\underline{b}$ με τα αντίστοιχα <u>θετικά</u> στοιχεία της στήλης $\underline{P}_1$, π.χ. $\theta_1 = \frac{65}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot 65$. Αφού υπολογίσουμε όλα τα θ, επιλέγουμε το μικρότερο. Το στοιχείο της στήλης $\underline{P}_1$ από το οποίο προέκυψε το μικρότερο θ το βάζουμε μέσα σε ένα τετράγωνο και καλείται πιλότος. Εδώ $\theta_1 = 260$, $\theta_2 = 72$ και $\theta_3 = 85$. Έτσι το μικρότερο είναι το θ_2 και άρα ο πιλότος μας είναι το $\frac{5}{4}$.

			15	10	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_3	0	65	$\frac{1}{4}$	1	1	0	0	4·65	Γ_1
P_4	0	90	$\boxed{\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$90\frac{4}{5}$=72	Γ_2
P_5	0	85	1	1	0	0	1	85/1=85	Γ_3
	z	0	-15	-10	0	0	0		Γ_4

Έτσι ολοκληρώσαμε τη συμπλήρωση του πρώτου tableau και είμαστε έτοιμοι, εφόσον έχουμε προσδιορίσει τον πιλότο, να προχωρήσουμε στην κατασκευή του επόμενου tableau. Ο πιλότος βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή και στην πρώτη στήλη. Άρα η στήλη $\underline{P}_4$ (που βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή) φεύγει από τη βάση και στη θέση της μπαίνει η στήλη $\underline{P}_1$ (που βρίσκεται στην πρώτη στήλη). Έτσι στο επόμενο tableau η βάση αποτελείται από τις στήλες $\underline{P}_3$, $\underline{P}_1$, $\underline{P}_5$. Για να είναι η $\underline{P}_1$ βασική σημαίνει ότι είναι στήλη του μοναδιαίου και μάλιστα της μορφής της $\underline{P}_4$ που έφυγε από τη βάση. Έτσι με γραμμοπράξεις δημιουργούμε 1 στη θέση του πιλότου και κάνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης $\underline{P}_1$ μηδέν. Γενικά η νέα γραμμή του πιλότου Γ_i' προκύπτει από την i γραμμή του προηγούμενου tableau (Γ_i) όταν αυτή διαιρεθεί με τον πιλότο ($\Gamma_i' = \Gamma_i/x_{ij}$). Η s γραμμή (Γ_s') του νέου tableau, προκύπτει από την s γραμμή του προηγούμενου tableau (Γ_s) όταν από αυτή αφαιρεθεί η Γ_i' πολλαπλασιασμένη με το s στοιχείο x_{sj} της στήλης του πιλότου ($\Gamma_s' = \Gamma_s - x_{sj}\Gamma_i'$).

Στο παράδειγμά μας, πρώτα διαιρούμε όλα τα στοιχεία της γραμμής του πιλότου με τον πιλότο οπότε προκύπτει η γραμμή $\Gamma_2' = \Gamma_2/(5/4)$. Στη συνέχεια εκτελούμε τις γραμμοπράξεις όπως φαίνονται στο επόμενο tableau. π.χ. η Γ_1', εφόσον θέλουμε να δημιουργήσουμε 0 στη θέση του $\frac{1}{4}$, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την καινούρια γραμμή του πιλότου (Γ_2') με $-\frac{1}{4}$ και να την προσθέσουμε στην Γ_1. Έτσι προκύπτει ότι $\Gamma_1' = \Gamma_1 - \frac{1}{4}\Gamma_2'$. Ομοίως συμπληρώνουμε και τις υπόλοιπες γραμμές του tableau (χωρίς βέβαια τη στήλη των θ). Αφού ολοκληρώσουμε τη συμπλήρωση και του δεύτερου tableau, ελέγχουμε αν η λύση είναι άριστη (μέσω και πάλι των διαφορών $z_k - c_k$). Αν η λύση είναι άριστη η διαδικασία τερματίζεται. Αν όχι, τότε επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα (βρίσκουμε τα θ, βρίσκουμε τον πιλότο κ.ο.κ.) μέχρι να καταλήξουμε στο βέλτιστο tableau. Συνολικά η διαδικασία στο παράδειγμά μας φαίνεται παρακάτω.

			15	10	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_3	0	65	$\frac{1}{4}$	1	1	0	0	4·65	Γ_1
P_4	0	90	$\boxed{\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$90\frac{4}{5}$=72	Γ_2
P_5	0	85	1	1	0	0	1	85/1=85	Γ_3
	z	0	-15	-10	0	0	0		Γ_4
P_3	0	47	0	$\frac{9}{10}$	1	-$\frac{1}{5}$	0	$47\frac{10}{9}$	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \frac{1}{4}\Gamma_2'$
P_1	15	72	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	0	$72\frac{5}{2}$	$\Gamma_2' = \frac{4}{5}\Gamma_2$
P_5	0	13	0	$\boxed{\frac{3}{5}}$	0	-$\frac{4}{5}$	1	$13\frac{5}{3}$	$\Gamma_3' = \Gamma_3 - \Gamma_2'$
	z	15·72	0	-4	0	12	0		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 15\Gamma_2'$
P_3	0	$\frac{55}{2}$							$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{9}{10}\Gamma_3''$
P_1	15	$\frac{190}{3}$							$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{2}{5}\Gamma_3''$
P_2	10	$\frac{65}{3}$	0	1	0	-$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		$\Gamma_3'' = \frac{5}{3}\Gamma_3'$
	z	$\frac{3500}{3}$	0	0	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$		$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + 4\Gamma_3''$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο tableau είναι το βέλτιστο αφού όλες οι διαφορές στην τελευταία γραμμή είναι μη αρνητικές. Άρα η άριστη λύση σύμφωνα με τον αλγόριθμο Simplex είναι η $x_1 = \frac{190}{3},\ x_2 = \frac{65}{3},\ x_3 = \frac{55}{2},\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.$

Παρατήρηση 2 *Εάν το π.γ.π. είναι σε κανονική μορφή αλλά δεν εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας, τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας ο αλγόριθμος Simplex. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των τεχνητών μεταβλητών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή σε όποιους από τους περιορισμούς του π.γ.π. απαιτείται προσθέτουμε από μία μη αρνητική μεταβλητή (τεχνητή μεταβλητή) ώστε να δημιουργείται ο μοναδιαίος πίνακας. Στην αντικειμενική συνάρτηση οι τεχνητές μεταβλητές εισάγονται με συντελεστή κόστους $M \ll 0$. Αν στην άριστη λύση του προβλήματος υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές με θετική τιμή, τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις (άρα δεν έχει άριστη λύση).*

1.3 Το δυϊκό π.γ.π.

Ορισμός 2 *Ένα π.γ.π. είναι σε ημικανονική μορφή αν έχει τη μορφή*

$$\begin{gathered}(\pm)\max \underline{c}'\underline{x}\\ A\underline{x} \leq \underline{b}\\ \underline{x} \geq 0\end{gathered}$$

όπου $\underline{c},\ \underline{x} \in M_{n\times 1},\ \underline{b} \in M_{m\times 1}$ και $A \in M_{m\times n}$.

Ορισμός 3 *Έστω το π.γ.π. σε ημικανονική μορφή (πρωτεύον πρόβλημα (Π))*

$$\begin{gathered}(\pm)\max \underline{c}'\underline{x}\\ A\underline{x} \leq \underline{b}\\ \underline{x} \geq 0\end{gathered}$$

Ορίζουμε ως δυϊκό πρόβλημα του (Π), το π.γ.π.

$$(\mp) \min \underline{b}'\underline{w}$$
$$A'\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{w} \geq 0$$

όπου $\underline{w} \in M_{m\times 1}$ *και* $A' \in M_{n\times m}$ *είναι ο ανάστροφος του* A.

Δεδομένου ενός π.γ.π., προκειμένου να γράψουμε το δυϊκό του, δεν είναι απαραίτητο να το φέρουμε σε ημικανονική μορφή. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες

i. Αν μία μεταβλητή του ενός δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι εξίσωση και αντίστροφα.

ii. Αν μία μεταβλητή του ενός είναι μη θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ανίσωση με φορά αντίθετη της αναμενόμενης και αντίστροφα. Ως αναμενόμενη φορά των περιορισμών εννοούμε την '$\leq$' για πρόβλημα μεγιστοποίησης και την '$\geq$' για πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Θα εφαρμόσουμε τους παραπάνω κανόνες για να βρούμε το δυϊκό πρόβλημα του π.γ.π.

$$\begin{array}{lccccc} \max & (15x_1 & + & 10x_2) & & \\ & \frac{1}{4}x_1 & + & x_2 & \leq & 65 \\ & \frac{5}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 90 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 85 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσες μεταβλητές όσοι και οι περιορισμοί του αρχικού, ενώ έχει τόσους περιορισμούς όσες οι μεταβλητές του αρχικού. Έτσι το δυϊκό έχει 3 μεταβλητές w_1, w_2, w_3 και δύο περιορισμούς. Εφόσον το αρχικό είναι πρόβλημα μεγιστοποίσης, το δυϊκό είναι ελαχιστοποίησης και η αντικειμενική του συνάρτηση προκύπτει αν ως συντελεστές των w_1, w_2, w_3 χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία του $\underline{b}$. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι $w = \min(65w_1 + 90w_2 + 85w_3)$. Ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού προκύπτει αν κοιτάξουμε την πρώτη στήλη του πίνακα A και το συντελεστή της πρώτης μεταβλητής x_1 στην αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος. Όσον αφορά τη φορά της ανίσωσης του περιορισμού ελέγχουμε αν η x_1 είναι μη αρνητική. Εδώ

$x_1 \geq 0$, άρα ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού θα έχει φορά την αναμενόμενη του προβλήματος ελαχιστοποίησης ('$\geq$'). Με βάση τα προηγούμενα, ο πρώτος περιορισμός του (Δ) θα είναι $\frac{1}{4}w_1 + \frac{5}{4}w_2 + w_3 \geq 15$. Σκεπτόμενοι αντίστοιχα μπορούμε να σχηματίσουμε και τον δεύτερο περιορισμό του (Δ). Όσον αφορά το πρόσημο των μεταβλητών του, αρκεί να ελέγξουμε αν οι αντίστοιχοι περιορισμοί του (Π) έχουν την αναμενόμενη φορά του προβλήματος στο οποίο ανήκουν. Παρατηρούμε ότι και οι τρεις περιορισμοί έχουν φορά '$\leq$' που είναι η αναμενόμενη φορά του προβλήματος μεγιστοποίησης. Άρα και οι τρεις μεταβλητές του (Δ) θα είναι μη αρνητικές. Έτσι το (Δ) έχει τελικά τη μορφή

$$\begin{array}{lccccccc}
\min & (65w_1 & + & 90w_2 & + & 85w_3) & & \\
 & \frac{1}{4}w_1 & + & \frac{5}{4}w_2 & + & w_3 & \geq & 15 \\
 & w_1 & + & \frac{1}{2}w_2 & + & w_3 & \geq & 10 \\
 & w_1 & , & w_2 & , & w_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Θεωρήματα 1 *Ισχύουν τα εξής Θεωρήματα:*

1. *Αν $\underline{x}$ είναι μια εφικτή λύση του (Π) και $\underline{w}$ μια εφικτή λύση του (Δ) τότε $\underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{w}$.*

2. *Αν το (Π) έχει άριστη λύση, τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτησεών τους ταυτίζονται.*

3. *Αν το (Π) είναι μη φραγμένο, τότε το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.*

4. *Αν $\hat{\underline{x}}$ η άριστη λύση του (Π) και $\hat{\underline{w}}$ η άριστη λύση του (Δ) τότε*

   i. $\underline{c}'\hat{\underline{x}} = \underline{b}'\hat{\underline{w}}$.

   ii. $\hat{x}_i(a_{1i}\hat{w}_1 + a_{2i}\hat{w}_2 + \cdots + a_{mi}\hat{w}_m - c_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

   iii. $\hat{w}_i(a_{i1}\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{in}\hat{x}_n - b_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Με βάση τα Θεωρήματα αυτά μπορούμε, αν είναι γνωστή η άριστη λύση του πρωτεύοντος(στην περίπτωση που υπάρχει), να υπολογίσουμε χωρίς τη χρήση της μεθόδου Simplex την άριστη λύση του Δυϊκού π.γ.π.

Παρατήρηση 3 *Οι σχέσεις $4ii$ και $4iii$ αναφέρονται και ως Θεώρημα συμπληρωματικότητας.*

1.4 Ασκήσεις–Λύσεις

1.4.1 Άσκηση 1^{η}

Ένα εργοστάσιο θέλει να παρασκευάσει μια κομπόστα αποτελούμενη από πορτοκάλι και βερίκοκο. Το κέρδος ανά 10 gr πορτοκάλι που περιέχει η κομπόστα είναι 15euro, ενώ για το βερίκοκο είναι 10euro. Η κομπόστα αυτή θα προτείνεται ως συμπλήρωμα διατροφής υποκαθιστώντας ένα γεύμα και άρα η δοσολογία δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τις συνιστόμενες ποσόστητες βιταμινών μιας ημέρας, όπως αυτές αναγράφονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Συστατικά	ανά 10 gr κομπόστας πορτοκαλιού	ανά 10 gr κομπόστας βερίκοκου	Σ.Η.Δ.*
Βιταμίνη C	0.25	1	65
Βιταμίνη B	1.25	0.5	90
Θερμιδική αξία	1	1	85

Σ.Η.Δ.=Συνιστόμενη Ημερήσια Δοσολογία.

Ζητείται:

α) Να γραφτεί το πρόβλημα ως π.γ.π.

β) Να λυθεί γραφικά.

γ) Να γραφτεί το π.γ.π. σε κανονική μορφή.

δ) Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex.

ε) Να γραφτεί το δυικό του π.γ.π.

ζ) Να λυθεί το δυικό.

Λύση

α) Μοντελοποίηση

Θεωρούμε x_1, x_2 να είναι οι ποσότητες πορτοκαλιού και βερίκοκου, αντίστοιχα, που θα χρησιμοποιηθούν για την παρασκευή της κομπόστας.

Τότε η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος δίνεται ως

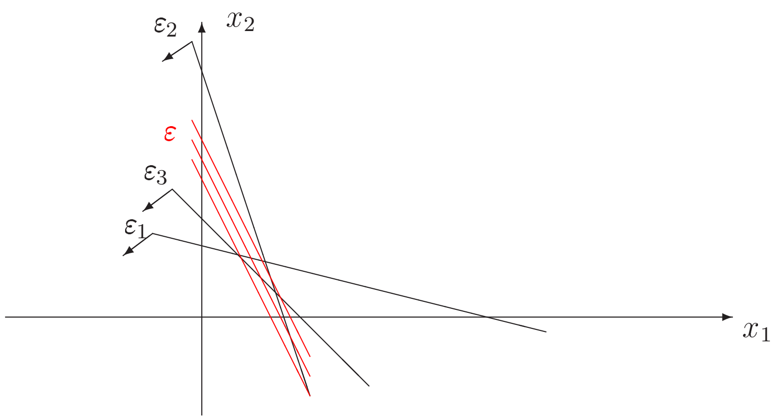
$$\begin{array}{lcccc} \max & (15x_1 & + & 10x_2) & & \\ & \frac{1}{4}x_1 & + & x_2 & \leq & 65 \\ & \frac{5}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 90 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 85 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

β) Γραφική επίλυση

Θεωρούμε για κάθε μια από τις παραπάνω ανισότητες τις αντίστοιχες ευθείες

$$\begin{aligned} \varepsilon &: 15x_1 + 10x_2 = 60 \\ \varepsilon_1 &: \frac{1}{4}x_1 + x_2 = 65 \\ \varepsilon_2 &: \frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 90 \\ \varepsilon_3 &: x_1 + x_2 = 85 \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 και επιλέγουμε τα αντίστοιχα ημιεπίπεδα που επαληθεύουν τις αρχικές ανισότητες. Η τομή όλων αυτών των ημιεπιπέδων ορίζει την εφικτή περιοχή. Θεωρούμε στην συνέχεια την ευθεία ε και την μετακινούμε παράλληλα και προς τα επάνω αναζητώντας την άριστη λύση.



Από το γράφημα παρατηρούμε πως η άριστη λύση μας δίνεται από την τομή των ευθειών ε_2 και ε_3. Λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων καταλήγουμε πως $x_1 = \frac{5}{3}13$ και $x_2 = \frac{190}{3}$.

γ) Κανονική μορφή

Το π.γ.π. γράφεται σε κανονική μορφή ως

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\max & (15x_1 & + & 10x_2) & & & & & & & \\
& \frac{1}{4}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & = & 65 \\
& \frac{5}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & & = & 90 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & + \; x_5 & = & 85 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , \; x_5 & \geq 0 &
\end{array}
$$

δ) Επίλυση με τον Αλγόριθμο Simplex

Παρατηρούμε πως σχηματίζεται ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και άρα μια πρώτη βασική εφικτή λύση θα δοθεί ως $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 65,\ x_4 = 90,\ x_5 = 85$.

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			15	10	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_3	0	65	$\frac{1}{4}$	1	1	0	0	4·65	Γ_1
P_4	0	90	$\boxed{\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$90\frac{4}{5}$=72	Γ_2
P_5	0	85	1	1	0	0	1	85/1=85	Γ_3
	z	0	-15	-10	0	0	0		Γ_4
P_3	0	47	0	$\frac{9}{10}$	1	-$\frac{1}{5}$	0	$47\frac{10}{9}$	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \frac{1}{4}\Gamma_2'$
P_1	15	72	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	0	$72\frac{5}{2}$	$\Gamma_2' = \frac{4}{5}\Gamma_2$
P_5	0	13	0	$\boxed{\frac{3}{5}}$	0	-$\frac{4}{5}$	1	$13\frac{5}{3}$	$\Gamma_3' = \Gamma_3 - \Gamma_2'$
	z	15·72	0	-4	0	12	0		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 15\Gamma_2'$
P_3	0	$\frac{55}{2}$							$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{9}{10}\Gamma_3''$
P_1	15	$\frac{190}{3}$							$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{2}{5}\Gamma_3''$
P_2	10	$\frac{65}{3}$	0	1	0	-$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		$\Gamma_3'' = \frac{5}{3}\Gamma_3'$
	z	$\frac{3500}{3}$	0	0	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$		$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + 4\Gamma_3''$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο tableau είναι το βέλτιστο αφού όλες οι διαφορές στην τελευταία γραμμή είναι μη αρνητικές. Άρα η άριστη λύση σύμφωνα με τον αλγόριθμο Simplex είναι η $x_1 = \frac{190}{3},\ x_2 = \frac{65}{3},\ x_3 = \frac{55}{2},\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$.

ε) Το δυικό πρόβλημα

$$\begin{array}{llllllll} \min & (65w_1 & + & 90w_2 & + & 85w_3) & & \\ & \frac{1}{4}w_1 & + & \frac{5}{4}w_2 & + & w_3 & \geq & 15 \\ & w_1 & + & \frac{1}{2}w_2 & + & w_3 & \geq & 10 \\ & w_1 & , & w_2 & , & w_3 & \geq & 0 \end{array}$$

ζ) Άριστη λύση του Δυικού

α τρόπος.

Παρατηρούμε πως η άριστη λύση του προτεύοντος ικανοποιεί τον 2ο και τον 3ο περιορισμό ως εξισώσεις, ενώ δεν ικανοποιείται η εξίσωση του 1ου περιορισμού. Συνεπώς $w_1 = 0$. Συνεπώς το δυικό πρόβλημα γράφεται ως

$$\begin{array}{llllll} \min & (90w_2 & + & 85w_3) & & \\ & \frac{5}{4}w_2 & + & w_3 & \geq & 15 \\ & \frac{1}{2}w_2 & + & w_3 & \geq & 10 \\ & w_2 & , & w_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Επίσης αν η 1η ανισότητα του δυικού προβλήματος ήταν γνήσια τότε θα έπρεπε $x_1 = 0$, πράγμα άτοπο. Άρα η πρώτη ανισότητα του δυικού είναι ισότητα. Ομοίως και για την 2η. Τελικά το δυικό πρόβλημα γράφεται

$$\begin{array}{llllll} \min & (90w_2 & + & 85w_3) & & \\ & \frac{5}{4}w_2 & + & w_3 & = & 15 \\ & \frac{1}{2}w_2 & + & w_3 & = & 10 \\ & w_2 & , & w_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Λύνοντας το σύστημα των 2 εξισώσεων έπεται ότι $w_2 = \frac{20}{3} = w_3$. Η λύση $w_1 = 0,\ w_2 = \frac{20}{3} = w_3$ είναι η άριστη λύση του δυικου π.γ.π.

β τρόπος.

Η άριστη λύση του δυικού π.γ.π. μπορεί να βρεθεί κοιτώντας το αρχικό και το τελικό tableau του αλγορίθμου Simplex. Παρατηρούμε πως ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας σχηματίζεται στις στήλες $(P_3,\ P_4,\ P_5)$. Άρα

$$\begin{aligned} w_1 &= (z_3 - c_3) + c_3 \\ w_2 &= (z_4 - c_4) + c_4 \\ w_3 &= (z_5 - c_5) + c_5 \end{aligned}$$

όπου οι διαφορές $(z_i - c_i)$ θα βρεθούν στις αντίστοιχες στήλες $i = 3, 4, 5$ του τελικού tableau Simplex. Τελικά

$$\begin{aligned} w_1 &= (0) + 0 \\ w_2 &= (\frac{20}{3}) + 0 \\ w_3 &= (\frac{20}{3}) + 0 \end{aligned}$$

1.4.2 Άσκηση 2^{η}

Ένα εργοστάσιο διαθέτει δύο μηχανές M_1 και M_2 για την παραγωγή ενός προϊόντος Π. Το κόστος λειτουργίας κάθε μηχανής είναι 6 και 4 ευρώ αντίστοιχα ανά ώρα λειτουργίας. Η μηχανή M_1 μπορεί να παράγει 6 μονάδες από το προϊόν Π ανά ώρα λειτουργίας και η M_2 2, ενώ για να καλυφθεί η υπάρχουσα ζήτηση πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον 72 μονάδες προϊόντος. Για κάθε ώρα λειτουργίας η M_1 καταναλώνει 0,75KW και η M_2 1,5KW ενώ η συνολική κατανάλωση σε ρεύμα δεν μπορεί να ξεπερνάει τα 12KW. Τέλος και δύο μηχανές πρέπει να δουλεύουν συνολικά 12 ώρες.

(α) Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως π.γ.π ορίζοντας κατάλληλες μεταβλητές και να επιλυθεί.

(β) Για το πρωτεύον πρόβλημα που θα γράψετε να δοθεί το δυικό του. Ποια η άριστη λύση του δυικού;

Λύση:

(α) Έστω x_i οι ώρες λειτουργίας της μηχανής i, $i = 1, 2$. Σκοπός είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος λειτουργίας $6x_1 + 4x_2$. Έτσι λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς παίρνουμε το π.γ.π

$$
\begin{array}{llllll}
\min & (6x_1 & + & 4x_2) & & \\
 & 0.75\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & \leq & 12 \quad \text{(περιορισμός από την κατανάλωση σε ρεύμα)} \\
 & 6\,x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 72 \quad \text{(περιορισμός για την κάλυψη της ζήτησης)} \\
 & x_1 & + & x_2 & = & 12 \quad \text{(περιορισμός για τις ώρες λειτουργίας)} \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Αρχικά θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex. Φέρνουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή μετατρέποντας το σε πρόβλημα μεγιστοποίησης και εισάγωντας περιθώριες μεταβλητές στους δύο πρώτους περιορισμούς ώστε να γίνουν ισότητες. Έτσι το πρόβλημα γράφεται στη μορφή:

$$\begin{array}{rccccccccc} -\max & (-6x_1 & - & 4x_2) & & & & & & \\ & 0.75\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\ & 6\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & - & x_4 & = & 72 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & = & 12 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Παρόλο που το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή, στον πίνακα των συντελεστών δεν εμφανίζεται ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας ώστε να μπορέσουμε να ξεκινήσουμε τη μέθοδο Simplex. Πιο συγκεκριμένα έχουμε μόνο την πρώτη του στήλη. Έτσι εισάγουμε δύο τεχνητές μεταβλητές στον δεύτερο και στον τρίτο περιορισμό οι οποίες εισάγωνται και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή M ($M <<$). Έτσι το πρόβλημα παίρνει την τελική μορφή:

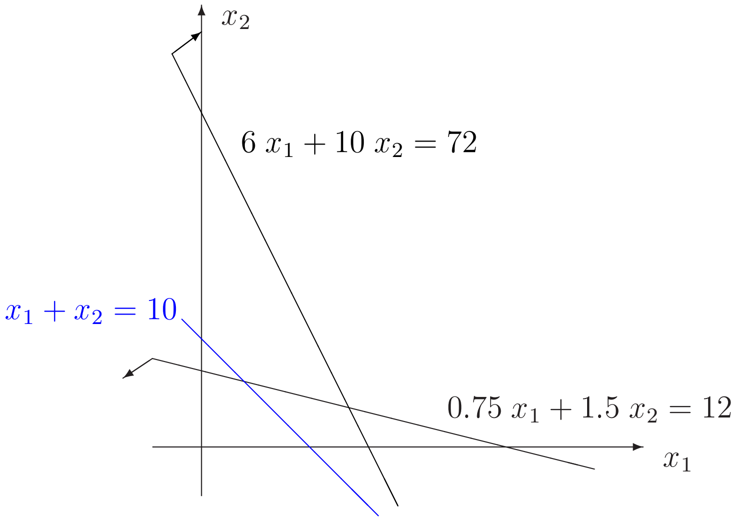
$$\begin{array}{rccccccccccccc} -\max & (-6x_1 & - & 4x_2 & + & M\,x_5 & + & M\,x_6) & & & & & & \\ & 0.75\,x_1 & + & 1.5\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 12 \\ & 6\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & & & = & 72 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 12 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0. \end{array}$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			-6	-4	0	0	M	M		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_3	0	12	0.75	1.5	1	0	0	0	12/0.75=16	Γ_1
P_5	M	72	6	2	0	-1	1	0	72/6=12	Γ_2
P_6	M	10	$\boxed{1}$	1	0	0	0	1	10/1=10	Γ_3
	z	$82M$	$7M+6$	$3M+4$	0	$-M$	0	0		Γ_4
P_3	0	4.5	0	0.75	1	0	0			$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 0.75\Gamma_3'$
P_5	M	12	0	-4	0	-1	1			$\Gamma_2' = \Gamma_2 - 6\Gamma_3'$
P_1	-6	10	1	1	0	0	0			$\Gamma_3' = \Gamma_3$
	z	$75M-6$	0	$-4M-2$	0	$-M$	0			$\Gamma_4' = \Gamma_4 - (7M+6)\Gamma_3'$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο tableau είναι το βέλτιστο αφού όλες οι διαφορές στην τελευταία γραμμή είναι μη αρνητικές. Όμως στην άριστη λύση υπάρχει τεχνητή μεταβλητή με θετική τιμή ($x_5 = 12$). Έτσι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Το ίδιο προκύπτει αν λύσουμε το αρχικό πρόβλημα γραφικά δεδομένου ότι είναι ένα πρόβλημα δύο μεταβλητών.



Η εφικτή περιοχή είναι η τομή των δυο ημιεπιπέδων με την ευθεία $x_1 + x_2 = 10$ η οποία σημειώνεται με μπλε χρώμα. Παρατηρούμε ότι η εφικτή περιοχή είναι κενή και άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση.

(β) Ακολουθώντας τους κανόνες μπορούμε να γράψουμε απευθείας το δυικό πρόβλημα χωρίς να χρειαστεί να φέρουμε το πρωτεύον προηγουμένως σε ημικανονική μορφή. Έτσι το δυικό είναι:

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & (12w_1 & + & 72w_2 & + & 10w_3) & & \\ & 0.75w_1 & + & 6w_2 & + & w_3 & \leq & 6 \\ & 1.5w_1 & + & 2w_2 & + & w_3 & \leq & 4 \\ & w_1 & \leq & 0, & w_2 & \geq & 0. & \end{array}$$

Προφανώς εφόσον το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύση το ίδιο ισχύει και για το δυικό του.

1.4.3 Άσκηση 3^{η}

Δίνεται το π.γ.π.

$$\begin{array}{lcccccc} \max & (15x_1 & + & 10x_2) & & \\ & & & x_2 & \leq & 50 \\ & -\frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & \text{-20} \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

και ζητείται:

α) Να λυθεί γραφικά.

β) Να γραφτεί το π.γ.π. σε κανονική μορφή.

γ) Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex.

δ) Να γραφτεί το δυικό του π.γ.π.

ε) Να λυθεί το δυικό.

Λύση

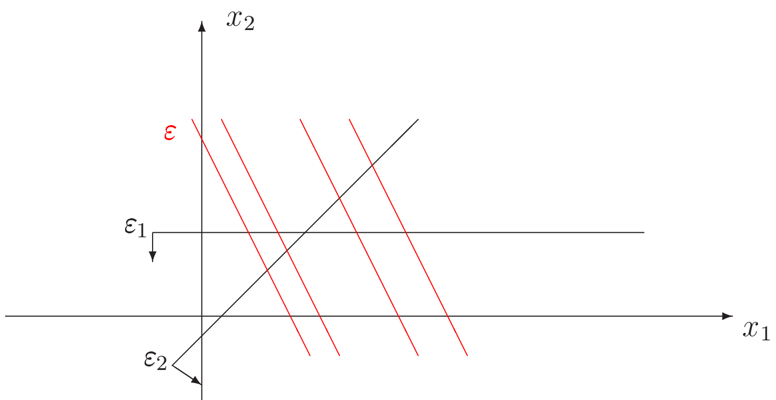
α) Γραφική επίλυση

Θεωρούμε για κάθε μια από τις ανισότητες του π.γ.π. τις αντίστοιχες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \varepsilon &: \ 15x_1 + 10x_2 = 60 \\ \varepsilon_1 &: \ x_2 = 50 \\ \varepsilon_2 &: \ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 = -20 \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 και επιλέγουμε τα αντίστοιχα ημιεπίπεδα που επαληθεύουν τις αρχικές ανισότητες. Η τομή όλων αυτών των ημιεπιπέδων ορίζει την εφικτή περιοχή. Θεωρούμε στην συνέχεια την ευθεία ε και την μετακινούμε παράλληλα και προς τα δεξιά αναζητώντας την άριστη λύση.

Από το γράφημα παρατηρούμε πως όσο και αν μετακινούμε την ευθεία ε αυτή αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παραμένοντας μέσα στην εφικτή περιοχή. Συνεπώς το



π.γ.π. δεν έχει άριστη λύση, καθώς η εφικτή περιοχή δεν είναι άνω φραγμένη και έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης.

β) Κανονική μορφή

Το π.γ.π. γράφεται σε κανονική μορφή ως

$$\max \quad (15x_1 + 10x_2)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & & & = & 50 \\ x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & & & - & \frac{2}{3}x_4 & = & \frac{40}{3} \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 & \end{array}$$

γ) Επίλυση με τον Αλγόριθμο Simplex

Παρατηρούμε πως σχηματίζεται ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας και άρα μια πρώτη βασική εφικτή λύση θα δοθεί ως $x_1 = \frac{40}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 50$, $x_4 = 0$.

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			15	10	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	θ	
P_3	0	50	0	$\boxed{1}$	1	0	50	Γ_1
P_1	15	$\frac{40}{3}$	1	-$\frac{2}{3}$	0	-$\frac{2}{3}$	–	Γ_2
	z	$\frac{400}{3}$	0	-20	0	-10		Γ_3
P_2	10	50	0	1	1	0		$\Gamma_1' = \Gamma_1$
P_1	15	$\frac{140}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{2}{3}$		$\Gamma_2' = \Gamma_2 + \frac{2}{3}\Gamma_1'$
	z	1200	0	0	20	-10		$\Gamma_3' = \Gamma_3 + 20\Gamma_1'$

Παρατηρούμε ότι στο τελευταίο tableau υπάρχει μια διαφορά αρνητική αλλά όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης είναι είτε αρνητικά είτε μηδενικά. Άρα σύμφωνα με τον αλγόριθμο

Simplex το πρόβλημα δεν είναι άνω φραγμένο.

δ) Το δυικό πρόβλημα

$$
\begin{array}{lccccc}
\min & (50w_1 & - & 20w_2) & & \\
 & & - & \frac{3}{2}w_2 & \geq & 15 \\
 & w_1 & + & w_2 & \geq & 10 \\
 & w_1 & , & w_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

ζ) Άριστη λύση του Δυικού

Παρατηρούμε ότι $-\frac{3}{2}w_2 \geq 15$ ισοδύναμα ότι $w_2 \leq -10$. Ταυτόχρονα θα πρέπει $w_2 \geq 0$. Άρα η εφικτή περιοχή του προβλήματος είναι κενή.

1.4.4 Άσκηση 4^{η}

Δίνεται το π.γ.π.

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & (15x_1 & + & 10x_2) & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 50 \\
 & \frac{3}{2}x_1 & - & x_2 & \geq & 20 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

και ζητείται:

α) Να λυθεί γραφικά.

β) Να γραφτεί το π.γ.π. σε κανονική μορφή.

γ) Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex.

δ) Να γραφτεί το δυικό του π.γ.π.

ε) Να λυθεί το δυικό.

Λύση

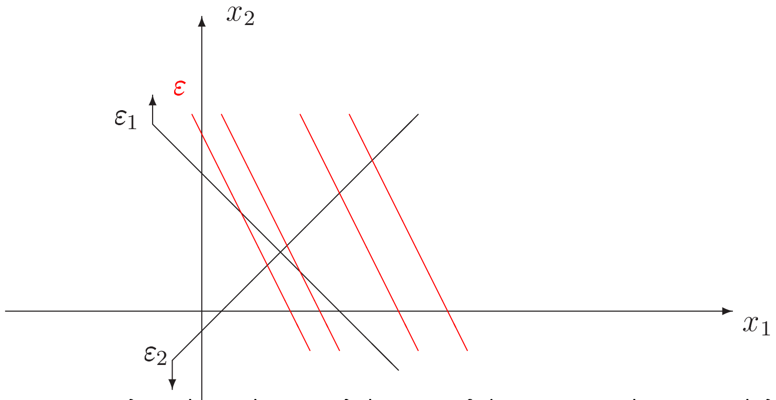
α) Γραφική επίλυση

Θεωρούμε για κάθε μια από τις ανισότητες του π.γ.π. τις αντίστοιχες εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &: \; 15x_1 + 10x_2 = 60 \\
\varepsilon_1 &: \; x_1 + x_2 = 50 \\
\varepsilon_2 &: \; \frac{3}{2}x_1 - x_2 = 20
\end{aligned}
$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 και επιλέγουμε τα αντίστοιχα ημιεπίπεδα που επαληθεύουν τις αρχικές ανισότητες. Η τομή όλων αυτών των ημιεπιπέδων ορίζει την εφικτή περιοχή. Θεωρούμε στην συνέχεια την ευθεία ε και την μετακινούμε παράλληλα και προς τα δεξιά αναζητώντας την άριστη λύση.

Από το γράφημα παρατηρούμε πως όσο και αν μετακινούμε την ευθεία ε αυτή αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παραμένοντας μέσα στην εφικτή περιοχή. Συνεπώς το



π.γ.π. δεν έχει άριστη λύση, καθώς η εφικτή περιοχή δεν είναι άνω φραγμένη και έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης.

β) Κανονική μορφή

Το π.γ.π. γράφεται σε κανονική μορφή ως

$$\begin{array}{llllllllll}
\max & (15x_1 & + & 10x_2) & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 50 \\
& \frac{3}{2}x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 20 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 &
\end{array}$$

γ) Επίλυση με τον Αλγόριθμο Simplex

Παρατηρούμε πως δεν σχηματίζεται ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας και άρα θα εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές. Άρα

$$\begin{array}{llllllllllllll}
\max & (15x_1 & + & 10x_2 & & & & & + & Mx_5 & + & Mx_6) & & \\
& x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 50 \\
& \frac{3}{2}x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 20 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq 0 &
\end{array}$$

Με την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών μια πρώτη βασική εφικτή λύση θα δοθεί ως $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 50,\ x_6 = 20$.

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			15	10	0	0	M	M		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_5	M	50	1	1	-1	0	1	0	50	Γ_1
P_6	M	20	$\boxed{\frac{3}{2}}$	-1	0	-1	0	1	$\frac{40}{3}$	Γ_2
	z	70M	$\frac{5}{2}$M-15	-10	-M	-M	0	0		Γ_3
P_5	M	$\frac{110}{3}$	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	-1	$\frac{2}{3}$	1			$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2'$
P_1	15	$\frac{40}{3}$	1	-$\frac{2}{3}$	0	-$\frac{2}{3}$	0			$\Gamma_2' = \frac{2}{3}\Gamma_2$
	z	$\frac{110}{3}M + 200$	0	$\frac{5}{3}M - 20$	-M	$\frac{2}{3}$M-10	0			$\Gamma_3' = \Gamma_3 - (\frac{5}{2}M - 15)\Gamma_2'$
P_2	10	550	0	1	-$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$				$\Gamma_1'' = \frac{3}{5}\Gamma_1'$
P_1	15	$\frac{1140}{3}$	1	0	-$\frac{2}{5}$	-$\frac{2}{5}$				$\Gamma_2'' = \Gamma_2' + \frac{2}{3}\Gamma_1''$
	z	$100 \cdot 112$	0	0	-12	-2				$\Gamma_3'' = \Gamma_3' - (\frac{5}{3}M - 20)\Gamma_1''$

Παρατηρούμε ότι στο τελευταίο tableau η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά έχει όλα τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης αρνητικά. Άρα σύμφωνα με τον αλγόριθμο Simplex το πρόβλημα δεν είναι άνω φραγμένο.

δ) Το δυικό πρόβλημα

$$\begin{array}{lcccc} \min & (50w_1 & + & 20w_2) & \\ & w_1 & + & \frac{3}{2}w_2 & \geq & 15 \\ & w_1 & - & w_2 & \geq & 10 \\ & w_1 & , & w_2 & \leq & 0 \end{array}$$

ζ) Άριστη λύση του Δυικού

Παρατηρούμε ότι $w_1 + \frac{3}{2}w_2 \geq 15$ ισοδύναμα ότι $\frac{2}{3}w_1 + w_2 \geq 10$. Και $w_1 - w_2 \geq 10$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο ανισότητες έπεται ότι $\frac{5}{3}w_1 \geq 20$. Ταυτόχρονα θα πρέπει $w_1 \leq 0$. Άρα η εφικτή περιοχή του προβλήματος είναι κενή.

1.4.5 Άσκηση 5^{η}

Δίνεται το π.γ.π.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min & (x_1 & - & 2x_2) & + & 3x_3 & & & & \\
 & & & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & & \leq & \frac{1}{2} \\
 & & - & x_2 & & & - & 2x_4 & \geq & -8 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

(α) Να επιλυθεί το π.γ.π. με τη μέθοδο Simplex. Υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση; Σε καταφατική περίπτωση να βρεθεί.

(β) Να γραφεί το δυικό πρόβλημα και να βρεθεί η άριστη λύση του αν υπάρχει.

Λύση:

(α) Για να λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex πρέπει να το φέρουμε πρώτα σε κανονική μορφή. Δηλαδή το μετατρέπουμε σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, πολλαπλασιάζουμε με -1 τη δεύτερη και την τρίτη σχέση ώστε $b_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3$ και στη συνέχεια εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές στους δύο πρώτους περιορισμούς ώστε να γίνουν ισότητες. Έτσι το πρόβλημα γράφεται στη μορφή:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
-\max & (-x_1 & + & 2x_2) & - & 3x_3 & & & & & & & & \\
 & & & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & & + & x_5 & & & = & \dfrac{1}{2} \\
 & & & x_2 & & & + & 2x_4 & & & + & x_6 & = & 8 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_5	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0		Γ_1
P_6	0	8	0	1	0	$\boxed{2}$	0	1	8/2=4	Γ_2
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	10/2=5	Γ_3
	z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4
P_5	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0		$\Gamma_1' = \Gamma_1$
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$		$\Gamma_2' = \Gamma_2$
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		$\Gamma_3' = \Gamma_3 - 2\Gamma_2'$
	z	-2	0	0	2	0	0	1		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_2'$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο tableau είναι το βέλτιστο αφού όλες οι διαφορές στην τελευταία γραμμή είναι μη αρνητικές. Έτσι η άριστη λύση είναι $x_1 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{2}$ ενώ όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι 0. Δηλαδή η άριστη λύση είναι η $\mathbf{x_1} = (2, 0, 0, 4, \frac{1}{2}, 0)$. Η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (για το αρχικό πρόβλημα) είναι $z^* = -(-2) = 2$. Παρατηρούμε ότι στο τελευταίο tableau στη γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης υπάρχει 0 σε μη βασική στήλη (στην P_2). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση την οποία μπορούμε να βρούμε κάνοντας αυτή τη στήλη βασική και εφαρμόζοντας την μέθοδο Simplex για ένα ακόμα βήμα. Έτσι λοιπόν ξαναγράφοντας το τελευταίο tableau και το νέο που θα προκύψει όπως περιγράψαμε παίρνουμε:

P_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	Γ_1'
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$	Γ_2'
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		Γ_3'
	z	-2	0	0	2	0	0	1		Γ_4'
P_2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0		$\Gamma_1'' = \Gamma_1'$
P_4	0	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{1}{2}\Gamma_1''$
P_1	-1	3	1	0	0	0	2	-1		$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + 2\Gamma_1''$
	z	-2	0	0	2	0	0	1		$\Gamma_4'' = \Gamma_4'$

Άρα η εναλλακτική άριστη λύση είναι η $\mathbf{x_2} = (3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0)$ ενώ προφανώς η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αλλάζει. Έτσι κάθε κυρτός συνδιασμός των δύο άριστων λύσεων είναι άριστη λύση. Δηλαδή το αρχικό πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2},\ \lambda \in [0,1]$.

(β) Θα γράψουμε το δυικό πρόβλημα απευθείας από το πρωτεύον.

$$\begin{array}{rcccccccc}
\max & (\frac{1}{2}\,w_1 & - & 8w_2 & - & 10w_3) & & \\
 & & & & - & w_3 & \leq & 1 \\
 & w_1 & - & w_2 & + & w_3 & \leq & -2 \\
 & -\frac{1}{2}w_1 & & & - & w_3 & \leq & 3 \\
 & & - & 2w_2 & - & 2w_3 & \leq & 0 \\
 & w_1 & \leq & 0, & w_2 & \geq & 0. &
\end{array}$$

Θα βρούμε την άριστη λύση του δυικού προβλήματος με διάφορους τρόπους εφαρμόζοντας γνωστές προτάσεις.

$1^{\text{ος}}$ τρόπος: Από το tableau της Simplex του πρωτεύοντος

Γνωρίζουμε ότι $w_j = (z_j - c_j) + c_j$ όπου το j αντιστοιχεί στους δείκτες που σχηματίζουν το μοναδιαίο πίνακα στο αρχικό tableau και με τη σειρά που τον σχηματίζουν. Έτσι $w_1 = (z_5 - c_5) + c_5 = 0 + 0 = 0,\ w_2 = (z_6 - c_6) + c_6 = 1 + 0 = 1$ και $w_3 = (z_1 - c_1) + c_1 = 0 - 1 = -1$.

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $w^* = \frac{1}{2}\cdot 0 - 8\cdot 1 - 10\cdot(-1) = 2 = z^*$.

$2^{\text{ος}}$ τρόπος: Με βάση τη σχέση $\mathbf{w}' = c'_B B^{-1}$

Ο πίνακας B^{-1} βρίσκεται στο τελικό tableau, κοιτάζοντας τις αντίστοιχες στήλες στις οποίες βρισκεται ο μαναδιαίος πίνακας στο αρχικό tableau και με τη σειρά που τον σχηματίζουν. Δηλαδή

$$B^{-1} = \left(P_5^T\ P_6^T\ P_1^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και $c'_B = (0\ 0\ -1)$, το διάνυσμα των συντελεστών στο τελικό tableau της Simplex. Έτσι παίρνουμε

$$\mathbf{w}' = c'_B B^{-1} = (0\ 0\ -1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (0\ 1\ -1).$$

Έτσι $w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = -1$ όπως προέκυψε και με τον προηγούμενο τρόπο.

Παρατήρηση: Προφανώς η ίδια λύση θα προκύψει για το δυικό πρόβλημα αν χρησιμοποιήσουμε ως τελικό tableau Simplex αυτό που έδωσε την εναλλακτική άριστη λύση του πρωτεύοντος. Τότε βέβαια ο πίνακας B^{-1} θα ήταν

$$B^{-1} = \left(P_5^T\ P_6^T\ P_1^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και $c'_B = (2\ 0\ -1)$.

$3^{ος}$ τρόπος: Θεώρημα συμπληρωματικότητας

Το Θεώρημα συμπληρωματικότητας αναφέρει ότι οι $\mathbf{x}$ και $\mathbf{w}$ είναι οι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυικού αντίστοιχα αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} w_i(b_i - A'_i\mathbf{x}) &= 0,\ i = 1, \ldots, m \\ (\mathbf{w}'A_j - c_j)x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

όπου A_k είναι η k-οστή στήλη του πίνακα A.

Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα, για τις άριστες λύσεις των δύο προβλημάτων ισχύει ότι αν μία μεταβλητή του ενός είναι μη μηδενική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ισότητα και αντίστροφα δηλαδή αν ένας περιορισμός του ενός υπολογισμένος στην άριστη λύση ισχύει ως μη ισότητα τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου είναι μηδενική.

Θα εφαρμόσουμε τον παραπάνω συλλογισμό στο πρόβλημά μας. Για την άριστη λύση του πρωτεύοντος έχουμε ότι $x_1 \neq 0$ και $x_4 \neq 0$. Άρα ο πρώτος και ο τέταρτος περιορισμός του δυικού θα ισχύουν ως ισότητες, δηλ. $-w_3 = 1$ και $-2w_2 - 2w_3 = 0$. Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε $w_3 = -1$ και $w_2 = 1$. Εφαρμόζοντας την άριστη λύση του πρωτεύοντος στους περιορισμούς του, παρατηρούμε ότι ο πρώτος περιορισμός δε γίνεται ισότητα. Άρα η αντίστοιχη μεταβλητή του δυικού είναι μηδενική, δηλαδή $w_1 = 0$.

Παρατηρούμε ότι η άριστη λύση του δυικού είναι εκφυλισμένη. Αυτό συμβαίνει όταν το πρωτεύον έχει άπειρες λύσεις, το οποίο ισχύει στη δική μας περίπτωση.

1.4.6 Άσκηση 6^{η}

Μια εταιρεία παράγει τρείς τύπου παντελονιών. Αναλόγως τον τύπο του κάθε παντελονιού η εταιρεία έχει καθαρό κέρδος 22euro από τον πρώτο τύπο, 30euro από τον δεύτερο τύπο και 25euro από τον τρίτο. Για την κατασκευή του κάθε τύπου παντελονιού απαιτούνται πρώτες ύλες από ελαστικό νήμα, βαμβάκι και μετάξι, όπως αυτά φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Σύνθεση	για τον 1ο τύπο παντελονιού	για τον 2ο τύπο παντελονιού	για τον 3ο τύπο παντελονιού
Ελαστικό νήμα	2	2	0
Βαμβάκι	2	1	1
Μετάξι	1	2	2

Η εταιρεία στις αποθήκες τις διαθέτει 100 μονάδες από τον κάθε τύπο νήματος. Ζητείται:

α) Να μοντελοποιηθεί ως π.γ.π.

β) Να γραφτεί το π.γ.π. σε κανονική μορφή.

γ) Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex.

δ) Να γραφτεί το δυικό του π.γ.π.

ε) Να λυθεί το δυικό.

Λύση

α) Μοντελοποίηση

Θεωρούμε x_i να είναι οι ποσότητες των παντελονιών τύπου $i = 1, 2, 3$ που θα παρασκευαστούν.

Τότε η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος δίνεται ως

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & (22x_1 & + & 30x_2 & + & 25x_3) & & \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 100 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 100 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

β) Κανονική μορφή

Το π.γ.π. γράφεται σε κανονική μορφή ως

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\max & (22x_1 & + & 30x_2 & + & 25x_3) & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & \leq & 100 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & \leq & 100 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & x_6 & \leq & 100 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

δ) Επίλυση με τον Αλγόριθμο Simplex

Παρατηρούμε πως σχηματίζεται ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και άρα μια πρώτη βασική εφικτή λύση θα δοθεί ως $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 100,\ x_5 = 100,\ x_6 = 100$.

Φτιάχνουμε τον πίνακα Simplex:

			22	30	25	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_4	0	100	2	$\boxed{2}$	0	1	0	0	$\frac{100}{2}$	Γ_1
P_5	0	100	2	1	1	0	1	0	100	Γ_2
P_6	0	100	1	2	2	0	0	1	$\frac{100}{2}$	Γ_3
	z	0	-22	-30	-25	0	0	0		Γ_4
P_2	30	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0		$\Gamma_1' = \frac{1}{2}\Gamma_1$
P_5	0	50	1	0	1	-$\frac{1}{2}$	1	0		$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_1'$
P_6	0	0	-1	0	2	-1	0	1		$\Gamma_3' = \Gamma_3 - 2\Gamma_1'$
	z	1500	8	0	-22	15	0	0		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 30\Gamma_1'$

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Simplex μας οδήγησε σε μια εκφυλισμένη βασική λύση. Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε το 0 της βασικής μεταβλητής x_6 με έναν αυθαίρετα μικρό θετικό αριθμό ε στον οποίον δεν δίνουμε συγκεκριμένη τιμή. Εφαρμόζουμε στην συνέχεια τον αλγόριθμο για την νέα βασική εφικτή μη εκφυλισμένη λύση $x_1 = 0,\ x_2 =$

50, $x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 50,\ x_6 = \varepsilon$.

			22	30	25	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_2	30	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	–	$\Gamma_1' = \frac{1}{2}\Gamma_1$
P_5	0	50	1	0	1	-$\frac{1}{2}$	1	0	50	$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_1'$
P_6	0	ε	-1	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	$\frac{\varepsilon}{2}$	$\Gamma_3' = \Gamma_3 - 2\Gamma_1'$
	z	1500	8	0	-22	15	0	0		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 30\Gamma_1'$
P_2	30	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	50	$\Gamma_1'' = \Gamma_1'$
P_5	0	50-$\frac{\varepsilon}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	0	0	1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{3}$-$\frac{\varepsilon}{3}$	$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \Gamma_3''$
P_3	25	$\frac{\varepsilon}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	1	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	–	$\Gamma_3'' = \frac{1}{2}\Gamma_3'$
	z	1500+$\frac{25\varepsilon}{3}$	-$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{25}{2}$		$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + 25\Gamma_3''$
P_2	30	$\frac{50}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$								$\Gamma_1''' = \Gamma_1'' - \Gamma_2'''$
P_1	22	$\frac{100}{3} - \frac{\varepsilon}{3}$	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$		$\Gamma_2''' = \frac{2}{3}\Gamma_2'$
P_3	25	$\frac{50}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$								$\Gamma_3''' = \Gamma_3'' + \frac{1}{2}\Gamma_3''$
	z	1650+11ε	0	0	0	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{13}{2}$		$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + \frac{9}{2}\Gamma_3''$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο tableau είναι το βέλτιστο αφού όλες οι διαφορές στην τελευταία γραμμή είναι μη αρνητικές. Άρα η άριστη λύση σύμφωνα με τον αλγόριθμο Simplex είναι η $x_1 = \frac{100}{3},\ x_2 = \frac{50}{3},\ x_3 = \frac{50}{3},\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$.

ε) Το δυικό πρόβλημα

$$\begin{array}{lccccccc}
100\min & (w_1 & + & w_2 & + & w_3) & & \\
 & 2w_1 & + & 2w_2 & + & w_3 & \geq & 22 \\
 & 2w_1 & + & w_2 & + & 2w_3 & \geq & 30 \\
 & & & w_2 & + & 2w_3 & \geq & 25 \\
 & w_1 & , & w_2 & , & w_3 & \geq & 0
\end{array}$$

ζ) Άριστη λύση του Δυικού

Η άριστη λύση του δυικού π.γ.π. μπορεί να βρεθεί κοιτώντας το αρχικό και το τελικό tableau του αλγορίθμου Simplex. Παρατηρούμε πως ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας σχηματίζεται στις στήλες ($P_4,\ P_5,\ P_6$). Άρα

$$\begin{aligned} w_1 &= (z_4 - c_4) + c_4 \\ w_2 &= (z_5 - c_5) + c_5 \\ w_3 &= (z_6 - c_6) + c_6 \end{aligned}$$

όπου οι διαφορές $(z_i - c_i)$ θα βρεθούν στις αντίστοιχες στήλες $i = 4, 5, 6$ του τελικού tableau Simplex. Τελικά

$$\begin{aligned} w_1 &= (\frac{5}{2}) + 0 \\ w_2 &= (3) + 0 \\ w_3 &= (\frac{13}{2}) + 0 \end{aligned}$$

1.4.7 Άσκηση 7^{η}

Ας θεωρήσουμε μία βιομηχανία B η οποία χρησιμοποιεί τρεις πρώτες ύλες $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4$ για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4$. Στον πίνακα παρουσιάζονται το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, οι διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών καθώς και η ποσότητα η οποία απαιτείται από κάθε πρώτη ύλη για την παραγωγή μιας μονάδας από το κάθε προϊόν.

Πρώτες ύλες	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Διαθέσιμα αποθέματα πρώτων υλών
Y_1	3	1	2	4	3
Y_2	2	2	3	1	2
Y_3	3	2	4	1	4
κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	3	4	2	5	

(α) Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως π.γ.π ορίζοντας κατάλληλες μεταβλητές και να επιλυθεί.

(β) Για το πρωτεύον πρόβλημα που θα γράψετε να δοθεί το δυικό του. Ποια η άριστη λύση του δυικού; Ποια η ερμηνεία του;

Λύση:

(α) Έστω x_i: η παραγόμενη ποσότητα από το προϊόν Π_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε το π.γ.π. που προκύπτει σύμφωνα με τον πίνακα είναι:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\max & (3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4) & & \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Για να φέρουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή αρκεί να προσθέσουμε μία περιθώρια μεταβλητή σε κάθε έναν από τους περιορισμούς ώστε να γίνουν ισότητες. Έτσι το πρόβλημα σε κανονική μορφή γίνεται:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & (3x_1 & + \ 4x_2 & + \ 2x_3 & + \ 5x_4) & & & & \\
 & 3x_1 & + \ x_2 & + \ 2x_3 & + \ 4x_4 & + \ x_5 & & & = 3 \\
 & 2x_1 & + \ 2x_2 & + \ 3x_3 & + \ x_4 & & + \ x_6 & & = 2 \\
 & 3x_1 & + \ 2x_2 & + \ 4x_3 & + \ x_4 & & & + \ x_7 & = 4 \\
 & x_1 & , \ x_2 & , \ x_3 & , \ x_4 & , \ x_5 & , \ x_6 & , \ x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

Εφόσον έχουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Simplex.

			3	4	2	5	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ	
P_5	0	3	3	1	2	$\boxed{4}$	1	0	0	$\frac{3}{4}$	Γ_1
P_6	0	2	2	2	3	1	0	1	0	$\frac{2}{1}=2$	Γ_2
P_7	0	4	3	2	4	1	0	0	1	$\frac{4}{1}=4$	Γ_3
	z	0	-3	-4	-2	-5	0	0	0		Γ_4
P_4	5	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3/4}{1/4}=3$	$\Gamma_1'=\frac{1}{4}\Gamma_1$
P_6	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\boxed{\frac{7}{4}}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5/4}{7/4}=\frac{5}{7}$	$\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1'$
P_7	0	$\frac{13}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{13/4}{7/4}=\frac{13}{7}$	$\Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma_1'$
	z	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	0		$\Gamma_4'=\Gamma_4+5\Gamma_1'$
P_4	5	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0		$\Gamma_1''=\Gamma_1'-\frac{1}{4}\Gamma_2''$
P_2	4	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	0		$\Gamma_2''=\frac{4}{7}\Gamma_2'$
P_7	0	2	1	0	1	0	0	-1	1		$\Gamma_3''=\Gamma_3'-\frac{7}{4}\Gamma_2''$
	z	$\frac{40}{7}$	$\frac{19}{7}$	0	$\frac{31}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{11}{7}$	0		$\Gamma_4''=\Gamma_4'+\frac{11}{4}\Gamma_2''$

Έτσι η άριστη λύση του προβλήματος είναι $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = 0$ και $x_4 = \frac{4}{7}$. Αυτό με βάση τα στοιχεία του αρχικού προβλήματος σημαίνει ότι η Βιομηχανία B μεγιστοποιεί το κέρδος της, χρησιμοποιώντας τις πρώτες ύλες που διαθέτει, όταν παράγει $5/7$ μονάδες Π_2 και $4/7$ μονάδες Π_4 ενώ δεν παράγει καθόλου τα προϊόντα Π_1 και Π_3. Το μέγιστο κέρδος που επιτυγχάνει με αυτόν τον προγραμματισμό παραγωγής είναι

$$z^* = 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{7} + 2 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{4}{7} = \frac{40}{7}.$$

Επιπλέον οι χρησιμοποιούμενη τελικά ποσότητα Y_1 είναι σύμφωνα με τον πρώτο περιορισμό του προβλήματος $3x_1+x_2+2x_3+4x_4 = 3\cdot 0+1\cdot\frac{5}{7}+2\cdot 0+4\cdot\frac{4}{7} = 3$, δηλαδή χρησιμοποιείται όλη η διαθέσιμη ποσότητα Y_1. Ομοίως για την πρώτη ύλη Y_2 η χρησιμοποιούμενη ποσότητα είναι $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2\cdot 0 + 2\cdot\frac{5}{7} + 3\cdot 0 + 1\cdot\frac{4}{7} = 2$ ενώ για την Y_3 είναι $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3\cdot 0 + 2\cdot\frac{5}{7} + 4\cdot 0 + 1\cdot\frac{4}{7} = 2$. Δηλαδή εξαντλείται όλη η διαθέσιμη ποσότητα των πρώτων υλών Y_1 και Y_2 ενώ από την Y_3 από τις 4 διαθέσιμες μονάδες χρησιμοποιούνται οι 2 άρα παραμένουν αχρησιμοποίητες οι άλλες δύο μονάδες.

(β) Θα γράψουμε το δυικό πρόβλημα απευθείας από το πρωτεύον.

$$\begin{array}{rccccccc}
\min & (3w_1 & + & 2w_2 & + & 4w_3) & & \\
 & 3w_1 & + & 2w_2 & + & 3w_3 & \geq & 3 \\
 & w_1 & + & 2w_2 & + & 2w_3 & \geq & 4 \\
 & 2w_1 & + & 3w_2 & + & 4w_3 & \geq & 2 \\
 & 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & \geq & 5 \\
 & w_1 & , & w_2 & , & w_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια άλλη βιομηχανία M, η οποία χρησιμοποιεί τις ίδιες πρώτες ύλες Y_1, Y_2 και Y_3 με τη βιομηχανία B και η οποία επιθυμεί να αυξήσει τα αποθέματά της στις τρεις αυτές πρώτες ύλες. Η βιομηχανία M κάνει τη σκέψη ότι θα μπορούσε να αγοράσει τα αποθέματα πρώτων υλών της βιομηχανίας B, έναντι συμφέροντος και για τις δύο βιομηχανίες τιμήματος. Για το σκοπό αυτό η M πρέπει να προσφέρει στη B τέτοιες τιμές ώστε η τελευταία να προτιμήσει να πουλήσει τα αποθέματα της σε πρώτες ύλες στη M αντί να τα χρησιμοποιήσει για την παραγωγή προϊόντων. Έστω w_i: η τιμή που προσφέρει η M στη B για την αγορά μια μονάδας πρώτης ύλης Y_i, $i = 1, 2, 3$.

Το γεγονός ότι η παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Π_1 απαιτεί 3 μονάδες Y_1, 2 μονάδες Y_2 και 3 μονάδες Y_3 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος Π_1 είναι ίσο με 3 χρηματικές μονάδες σημαίνει ότι για να προτιμήσει η βιομηχανία B την προσφορά της M θα πρέπει, το ποσό που θα εισπράξει η B από την M για να της πουλήσει τις πρώτες ύλες που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Π_1, να είναι τουλάχιστον ίσο με το κέρδος των 3 χρηματικών μονάδων που θα είχε η βιομηχανία B

αν χρησιμοποιούσε τις πρώτες ύλες για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Π_1. Με βάση τα παραπάνω θα πρέπει $3w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq 3$. Αυτός είναι ο πρώτος περιορισμός που έχουμε γράψει για το δυικό πρόβλημα. Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό και για τα άλλα τρία προϊόντα παίρνουμε και τους υπόλοιπους περιορισμούς. Έτσι κάθε περιορισμός αντιστοιχεί σε ένα προϊόν δηλαδή σε μία μεταβλητή του πρωτεύοντος. Επιπλέον είναι λογικό η βιομηχανία M να θέλει να ελαχιστοποιήσει το συνολικό ποσό που θα προσφέρει στη B για την αγορά των διαθέσιμων 3, 2 και 4 μονάδων πρώτων υλών Y_1, Y_2 και Y_3 αντίστοιχα, δηλαδή θέλει $\min(3w_1 + 2w_2 + 4w_3)$ που είναι η αντικειμενική συνάρτηση του δυικού.

Ας υπολογίσουμε τώρα την άριστη λύση του δυικού.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (z_5 - c_5) + c_5 = \frac{6}{7} + 0 = \frac{6}{7} \\
w_2 &= (z_6 - c_6) + c_6 = \frac{11}{7} + 0 = \frac{11}{7} \\
w_3 &= (z_7 - c_7) + c_7 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

Αυτό σημαίνει ότι στην προσφορά της βιομηχανίας M, η τιμή ανά μονάδα των τριών πρώτων υλών Y_1, Y_2 και Y_3 πρέπει να καθορισθεί σε $\frac{6}{7}$, $\frac{11}{7}$ και 0 αντίστοιχα.

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυικού είναι $w^* = 3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot \frac{11}{7} + 4 \cdot 0 = \frac{40}{7}$, όπως περιμέναμε αφού οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων, πρωτεύοντος και δυικού, ταυτίζονται.

Για τις τιμές αυτές το εισόδημα της βιομηχανίας B, από την πώληση στη βιομηχανία M των ποσοτήτων πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας από τα προϊόντα Π_1 και Π_2 είναι ίσο με $3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot \frac{11}{7} + 3 \cdot 0 = \frac{40}{7} > 3$ και $2 \cdot \frac{6}{7} + 3 \cdot \frac{11}{7} + 4 \cdot 0 = \frac{45}{7} > 2$ αντίστοιχα. Δηλαδή είναι μεγαλύτερο από το κέρδος που θα είχε η βιομηχανία B αν χρησιμοποιούσε τις ποσότητες αυτές για την παραγωγή μιας μονάδας από το κάθε προϊόν. Αντίθετα, το εισόδημα της βιομηχανίας B από την πώληση στη M των ποσοτήτων πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας από τα προϊόντα Π_2 και Π_4, είναι ίσο με το μοναδιαίο κέρδος των προϊόντων αυτών αφού $1 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot \frac{11}{7} + 2 \cdot 0 = 4$ και $4 \cdot \frac{6}{7} + 1 \cdot \frac{11}{7} + 1 \cdot 0 = 5$. Με άλλα λόγια, το επιπλέον κέρδος για τα προϊόντα αυτά είναι ίσο με μηδέν. Έτσι τα Π_1 και Π_3 είναι υποτιμημένα σε σχέση με την αξία που αντιπροσωπεύουν οι πρώτες ύλες για την παραγωγή τους και για το λόγο αυτό δεν πρέπει να παράγονται. Αντίθετα, τα προϊόντα Π_2 και Π_4 έχουν σωστή τιμή σε σχέση με τις πρώτες ύλες. Εξάλλου το γεγονός ότι γίνεται μερική χρησιμοποίηση της πρώτης ύλης Y_3 σημαίνει ότι μια μικρή μεταβολή στη διαθέσιμη ποσότητα από αυτή την πρώτη ύλη δεν θα πρέπει να έχει επίπτωση στο κέρδος της βιομηχανίας B, αφού η πρώτη ύλη Y_3 ήταν ήδη σε υπερεπάρκεια. Έτσι η βιομηχανία B πρέπει να είναι διατεθειμένη να παραχωρήσει δωρεάν την πρώτη ύλη Y_3, με άλλα λόγια η βιομηχανία M πρέπει να καθορίσει την τιμή της Y_3 στο μηδέν, δηλαδή $w_3 = 0$.

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα μεταφοράς

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της οικονομικής διακίνησης ενός προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής σε ορισμένους σταθμούς προορισμού.

2.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα μεταφοράς

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς είναι η ακόλουθη.
Σε m σταθμούς παραγωγής A_1, A_2, ..., A_m ένα προϊόν υπάρχει σε ποσότητες α_1, α_2, ..., α_m, αντίστοιχα. Το προϊόν πρέπει να διανεμηθεί σε n σταθμούς προρισμού B_1, B_2, ..., B_n που απαιτούν ποσότητες β_1, β_2, ..., β_n, αντίστοιχα. Αρχικά υποθέτουμε πως η συνολική παραγωγή ισούται με την συνολική ζήτηση, δηλαδή πως $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. Θεωρούμε πως υπάρχει κόστος μεταφοράς από κάθε σταθμό παραγωγής πρός κάθε σταθμό ζήτησης, συγκεκριμένα το κόστος μεταφοράς από τον σταθμό παραγωγής A_i στον σταθμό προορισμού B_j θα συμβολίζεται με c_{ij}. Ζητείται να βρεθεί άριστο σχέδιο μεταφοράς, δηλαδή να βρεθούν οι κατάλληλες ποσότητες x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν από τον κάθε σταθμό παραγωγής σε κάθε σταθμό προορισμού έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς και συγχρόνως να ικανοποιούνται όλες οι ανάγκες των σταθμών προορισμού.

Παρατήρηση 4 *Αν η προσφορά είναι μεγαλύτερη από την ζήτηση, δηλαδή* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i > \sum_{j=1}^{n} \beta_j$*, τότε εισάγουμε έναν υποθετικό σταθμό προορισμού, έστω* B_{n+1} *ο οποίος απαιτεί ποσότητα* $\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j > 0$*, με κατάλληλα κόστη μεταφοράς* $c_{i\,n+1}$*.*

Αν η προσφορά είναι μικρότερη από την ζήτηση, δηλαδή $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < \sum_{j=1}^{n} \beta_j$, *τότε εισάγουμε έναν υποθετικό σταθμό παραγωγής, έστω* A_{m+1} *ο οποίος απαιτεί ποσότητα* $\alpha_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i > 0$, *με κατάλληλα κόστη μεταφοράς* $c_{m+1\,j}$.

Τέλος αν δεν υπάρχει μέσο μεταφοράς από έναν σταθμό παραγωγής σε έναν σταθμό προορισμού τότε υποθέτουμε πως το αντίστοιχο κόστος είναι ένας αυθαίρετα μεγάλος θετικός αριθμός M.

Τα δεδομένα του προβλήματος μεταφοράς μπορούν να γραφούν συνοπτικά με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	α_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	α_m
	β_1	β_2	$\cdots$	β_n	

Παρατήρηση 5 *Κάθε βασική εφικτή λύση του προβλήματος της μεταφοράς έχει ακριβώς* $m + n - 1$ *βασικές μεταβλητές και επομένως το πολύ* $m+n-1$ *θετικές συντεταγμένες. Αν η βασική εφικτή λύση έχει λιγότερες από* $m + n - 1$ *θετικές συντεταγμένες τότε καλείται εκφυλισμένη.*

Θεώρημα 1 *Το πρόβλημα μεταφοράς έχει πάντα άριστη λύση.*

2.2 Αλγόριθμος

Θα περιγράψουμε συνοπτικά την βασική δομή του αλγόριθμου εξεύρεσης άριστου σχεδίου μεταφοράς:

1. Αρχικά αναζητούμε μια πρώτη βασική εφικτή λύση. Τη λύση αυτή θα την βρούμε με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου. Ξεκινάμε από το τετράγωνο του πίνακα με το ελάχιστο δυνατό κόστος, έστω $c_{i_0 j_0}$ και μέσα στο τετράγωνο αυτό τοποθετούμε τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα, $x_{i_0 j_0} = min\{\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}\}$

(a) αν $x_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0}$ τότε μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής, εφόσον αυτός ο σταθμός παραγωγής δεν διαθέτει άλλο απόθεμα.

(b) αν $x_{i_0 j_0} = \beta_{j_0}$ τότε μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης, εφόσον αυτός ο σταθμός προορισμού έχει καλύψει όλη την ζήτηση.

(c) αν $x_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$ τότε μηδενίζουμε και την γραμμή και την στήλη, και άρα η λύση που θα προκύψει θα είναι εκφυλισμένη. Στην περίπτωση αυτή θα αναφερθούμε διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.

Συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου στο υπόλοιπο tableau μέχρι να συμπληρώσουμε όλα τα τετράγωνα του πίνακα.

Παράδειγμα 1 *Έστω ότι μας δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα μεταφοράς και μας ζητείται να βρεθεί άριστη λύση.*

	B_1	B_2	B_3	
A_1	8	7	4	40
A_2	5	4	2	30
A_3	6	9	5	20
	10	60	20	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	8	7	4	40
A_2	5	4	2 20	30
A_3	6	9	5	20
	10	60	20	

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο από τα κόστη μεταφοράς είναι το $c_{23} = 2$, οπότε σύμφωνα με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου θα συμπληρώσουμε το αντίστοιχο τετράγωνο θέτοντας $x_{23} = min\{\alpha_2, \beta_3\} = \{30, 20\} = 20$. Εφόσον $x_{23} = \beta_3 = 20$ θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης μιας και ο σταθμός προορισμού B_3 έχει πλέον καλύψει τις ανάγκες του. Επιπλέον ο σταθμός παραγωγής A_2 διέθεσε ποσότητα 20 στον B_3 και άρα τώρα διαθέτει ποσότητα ίση με $10 = 30 - 20$.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5}	^{4}	^{2} 20	$\cancel{30} \to 10$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	60	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5}	^{4}	^{2} 20	$\cancel{30} \to 10$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	60	$\cancel{20}$	

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο από τα κόστη μεταφοράς είναι το $c_{22} = 4$*, οπότε σύμφωνα με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου θα συμπληρώσουμε το αντίστοιχο τετράγωνο θέτοντας* $x_{22} = min\{\alpha_2, \beta_2\} = \{10, 60\} = 10$*. Εφόσον* $x_{22} = \alpha_2 = 10$ *θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής μιας και ο σταθμός παραγωγής* A_2 *δεν έχει πλέον άλλο απόθεμα. Επιπλέον ο σταθμός παραγωγής* B_2 *πήρε ποσότητα* 10 *από τον σταθμό παραγωγής* A_2 *και άρα τώρα ζητάει ποσότητα ίση με* $50 = 60 - 10$*.*

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to \cancel{50} \to 10$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9} 10	^{5} 0	$\cancel{20} \to \cancel{10}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to \cancel{50} \to \cancel{10}$	$\cancel{20}$	

Συνεπώς έχουμε βρεί μια βασική εφικτή λύση. Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή έχει $3+3-1 = 5$ *θετικά στοιχεία και άρα είναι μη εκφυλισμένη.*

2. Στη συνέχεια θέλουμε να ελέγξουμε αν η βασική εφικτή λύση, που έχουμε βρεί $\tilde{x}_{ij}$, είναι άριστη. Θεωρούμε τα στοιχεία u_i και v_j τα οποία καλούνται δυναμικά.

$u_i \setminus v_j$	v_1	v_2	$\cdots$	v_n	
u_1	c_{11} $\tilde{x}_{11}$	c_{12} $\tilde{x}_{12}$	$\cdots$	c_{1n} $\tilde{x}_{1n}$	α_1
u_2	c_{21} $\tilde{x}_{21}$	c_{22} $\tilde{x}_{22}$	$\cdots$	c_{2n} $\tilde{x}_{2n}$	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	c_{m1} $\tilde{x}_{m1}$	c_{m2} $\tilde{x}_{m2}$	$\cdots$	c_{mn} $\tilde{x}_{mn}$	α_m
	β_1	β_2	$\cdots$	β_n	

Θέτουμε $u_1 = 0$. Ενώ τα υπόλοιπα u_i και v_j υπολογίζονται ως εξής: κοιτάζουμε μόνο τα βασικά τετράγωνα, δηλαδή εκείνα στα οποία $\tilde{x}_{ij} > 0$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $u_i + v_j = c_{ij}$.

Παράδειγμα 2 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα υπολογίσουμε τα δυναμικά u_i και v_j για τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος.*

$u \setminus v$	v_1	v_2	v_3	
u_1	8 *0*	7 *40*	4 *0*	$\cancel{40}$
u_2	5 *0*	4 *10*	2 *20*	$\cancel{30}$
u_3	6 *10*	9 *10*	5 *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 7, \text{ εφόσον το } x_{12} > 0 \\
u_2 + v_2 &= 4, \text{ εφόσον το } x_{22} > 0 \\
u_2 + v_3 &= 2, \text{ εφόσον το } x_{23} > 0 \\
u_3 + v_1 &= 6, \text{ εφόσον το } x_{31} > 0 \\
u_3 + v_2 &= 9, \text{ εφόσον το } x_{32} > 0
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε $u_1 = 0$ και άρα επιλύοντας το παραπάνω σύστημα έπεται

$u \setminus v$	4	7	5	
0	^{8} *0*	^{7} *40*	^{4} *0*	$\cancel{40}$
-3	^{5} *0*	^{4} *10*	^{2} *20*	$\cancel{30}$
2	^{6} *10*	^{9} *10*	^{5} *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

Μόλις υπολογίσουμε τα δυναμικά καταγράφουμε στα μη βασικά τετράγωνα στην πάνω αριστερά γωνία την ποσότητα $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ οι οποίες καλούνται διαφορές.

Παράδειγμα 3 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα υπολογίσουμε τις διαφορές δ_{ij} για τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος.*

$u \setminus v$	4	7	5	
0	$^{-4}$ / ^{8} *0*	^{7} *40*	^{1} / ^{4} *0*	$\cancel{40}$
-3	$^{-4}$ / ^{5} *0*	^{4} *10*	^{2} *20*	$\cancel{30}$
2	^{6} *10*	^{9} *10*	^{2} / ^{5} *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

εφόσον

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = -4 \\
\delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 1 \\
\delta_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = -4 \\
\delta_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} = 2
\end{aligned}$$

3. Ελέγχουμε αν η λύση $\tilde{x}_{ij}$ είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές δ_{ij} στα μη βασικά τετράγωνα.

   (a) αν $\delta_{ij} \leq 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα τότε η λύση που έχει βρεθεί είναι άριστη. Αν επιπλέον $\delta_{ij} < 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα τότε η άριστη λύση που έχει βρεθεί είναι μοναδική.

   (b) αν υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ για κάποιο από τα μη βασικά τετράγωνα τότε η λύση που έχει βρεθεί **δεν** είναι άριστη, οπότε και συνεχίζουμε με το βήμα 4.

Παράδειγμα 4 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Παρατηρούμε πως οι διαφορές δ_{13} και δ_{33} είναι γνησίως θετικές και άρα δεν έχουμε οδηγηθεί σε άριστη λύση. Συνεπώς συνεχίζουμε με το βήμα 4.*

4. Αναζητούμε μια καλύτερη βασική εφικτή λύση. Επιλέγουμε το τετράγωνο εκείνο με την μεγαλύτερη θετική διαφορά, δηλαδή το τετράγωνο (i_0, j_0) που προκύπτει από την σχέση $(i_0, j_0) : \delta_{i_0,j_0} = max\{\delta_{ij} : \delta_{ij} > 0\}$ και το συνδέουμε με οριζόντιες και κάθετες γραμμές, σχηματίζοντας ένα ορθογώνιο το οποίο στις κορυφές του να έχει βασικά τετράγωνα, ίσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο τετράγωνο (i_0, j_0) από το οποίο και ξεκινήσαμε. Αποδεικνύεται, τότε, ότι υπάρχει ακριβώς μια επιλογή τετραγώνων τέτοια ώστε να ικανοποεί τέτοια επιλογή βασικών τετραγώνων. Θέτουμε διαδοχικά $+$ και $-$ σε καθένα από αυτά τα τετράγωνα ξεκινώντας με $+$ από το τετράγωνο (i_0, j_0), από το οποίο και ξεκινήσαμε. Οι τιμές τη νέας βασικής εφικτής λύσης είναι

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} + \theta_0 \text{ στα τετράγωνα που έχουν } + \\ x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} - \theta_0 \text{ στα τετράγωνα που έχουν } - \\ x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} \text{ στα υπόλοιπα τετράγωνα} \end{aligned}$$

όπου

$$\theta_0 = \tilde{x}_{i_1 j_1} = min\{\tilde{x}_{ij} : (i,j) \text{ τετράγωνα που έχουν } -\}\,.$$

Το αντίστοιχο συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $R_1 = R_0 - \theta_0 \delta_{i_0 j_0}$, όπου R_0 είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς που αντιστοιχεί στην λύση $\tilde{x}_{ij}$, αναλυτικά $R_0 = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} c_{ij}$.

Παράδειγμα 5 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος.

$u \setminus v$	4	7	5	
0	-4 / 8 0	7 40	1 / 4 0	~~40~~
-3	-4 / 5 0	4 + 10	2 - 20	~~30~~
2	6 10	9 - 10	2 / 5 + 0	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

Παρατηρούμε ότι το μοναδικό ορθογώνιο που σχηματίζεται με κορυφές σε βασικά τετράγωνα είναι αυτό με κορυφές $(3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,3)$. Τότε σύμφωνα με την θεωρία υπολογίζουμε το $\theta_0 = min\{\tilde{x}_{ij} : (i,j)$ τετράγωνα που έχουν $-\} = min\{\tilde{x}_{23}, \tilde{x}_{32}\} = min\{20, 10\}$.

Στη συνέχεια στα τετράγωνα με + προσθέτουμε την ποσότητα $\theta_0 = 10$ που υπολογίσαμε, ενώ στα τετράγωνα με − αφαιρούμε το $\theta_0 = 10$, τα υπόλοιπα τετράγωνα παραμένουν ως έχουν. Συνεπώς

$u \backslash v$				
	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
	^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
	^{6} 10	^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

5. Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Παράδειγμα 6 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα ελέγξουμε αν η λύση που έχουμε βρεί είναι άριστη υπολογίζοντας εκ νεου τα δυναμικά u_i και v_j και τις διαφορές δ_{ij}. Έχουμε*

$u \backslash v$	6	7	5	
0	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
-3	^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
0	^{6} 10	^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$u \backslash v$	6	7	5	
0	-2 / ^{8} 0	^{7} 40	1 / ^{4} 0	$\cancel{40}$
-3	-2 / ^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
0	^{6} 10	-2 / ^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά δ_{ij} θετική και άρα η λύση που έχουμε βρεί δεν είναι άριστη. Συνεχίζουμε όπως ορίζεται από τον αλγόριθμο στο βήμα 4.

$u \backslash v$	6	7	5	
0	$^{-2}$ ^{8} *0*	^{7} $-$ *40*	^{1} ^{4} $+$ *0*	$\cancel{40}$
-3	$^{-2}$ ^{5} *0*	^{4} $+$ *20*	^{2} $-$ *10*	$\cancel{30}$
0	^{6} *10*	$^{-2}$ ^{9} *0*	^{5} *10*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$u \backslash v$				
	^{8} *0*	^{7} *30*	^{4} *10*	$\cancel{40}$
	^{5} *0*	^{4} *30*	^{2} *0*	$\cancel{30}$
	^{6} *10*	^{9} *0*	^{5} *10*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$u \backslash v$	5	7	4	
0	^{8} *0*	^{7} *30*	^{4} *10*	$\cancel{40}$
-3	^{5} *0*	^{4} *30*	^{2} *0*	$\cancel{30}$
1	^{6} *10*	^{9} *0*	^{5} *10*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$u \backslash v$	5	7	4	
0	$^{-3}$ ^{8} *0*	^{7} *30*	^{4} *10*	$\cancel{40}$
-3	$^{-3}$ ^{5} *0*	^{4} *30*	$^{-1}$ ^{2} *0*	$\cancel{30}$
1	^{6} *10*	$^{-1}$ ^{9} *0*	^{5} *10*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

Στο τελευταίο tableau παρατηρούμε πως όλες οι διαφορές είναι γνησιώς αρνητικές και άρα η λύση που έχει προκύψει είναι άριστη και μάλιστα μοναδική.

Παρατήρηση 6 *Αν στο tableau που δίνει την άριστη λύση, υπάρχει μη βασικό τετράγωνο με διαφορά* $\delta_{ij} = 0$ *αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση που υπολογίζεται κάνοντας βασικό το τετράγωνο αυτό, δηλαδή σχηματίζουμε τετράγωνο με κορυφές βασικά τετράγωνα ξεκινώντας από το τετράγωνο με την μηδενική διαφορά.*

2.3 Εκφυλισμένες λύσεις

Αν στο πρόβλημα μεταφοράς υπάρχει γνήσιο υποσύνολο από $p < m$, σταθμούς παραγωγής με συνολική παραγωγή όση και η συνολική ζήτηση σε $q < n$, σταθμούς προορισμού, τότε υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις. Μπορεί σε οποιοδήποτε σημείο των πράξεων μας να προκύψει εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση, είτε εξαρχής με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου γιατί μηδενίστηκε ταυτόχρονα και γραμμή και στήλη, είτε κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς. Σε κάθε περίπτωση αντιμετωπίζονται τοποθετώντας αστερίσκους σε τετράγωνα με 0 για να τα αντιμετωπίζουμε ως βασικά τετράγωνα. Η επίλογη του μηδενικού τετραγώνου που θα γίνει βασικό είναι αυθαίρετη αν και προτείνεται να επιλέγεται αυτό με το μικρότερο κόστος. Αν θέλουμε να αποφύγουμε την εμφάνιση των μηδενικών βασικών τετραγώνων κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου μπορούμε να ακολουθήσουμε την μέθοδο της διαταραχής.

Δημιουργούμε ένα νεο πρόβλημα μεταφοράς θέτοντας

$$\alpha_i' = \alpha_i + \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{και} \quad \beta_j = \begin{cases} \beta_j, & j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \beta_n + m\epsilon, & j = n \end{cases}$$

όπου $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό. Λύνοντας το νεο πρόβλημα, για το οποίο δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις, και θέτοντας στο τελικό tableau $\epsilon = 0$, πάιρνουμε την άριστη λύση του αρχικού προβλήματος.

2.4 Ασκήσεις–Λύσεις

2.4.1 Άσκηση $1^{η}$

Μια εταιρία παράγει και διανέμει ένα προϊόν στους πελάτες της μέσω πραγγελιών. Για την τρέχουσα εβδομάδα έχει πάρει παραγγελίες από τους πελάτες 1, 2 και 3 για ποσότητες 180, 170 και 150 μονάδες προϊόντος, αντίστοιχα. Το προϊόν μπορεί να σταλεί στους πελάτες από δυο αποθήκες A και B που έχουν διαθέσιμες ποσότητες 200 μονάδες προϊόντος η κάθε μια. Το κόστος μεταφοράς από κάθε αποθήκη πρός κάθε πελάτη δίνεται στον παρακάτω πίνακα

	Πελάτης		
Αποθήκη	1	2	3
A	8	9	4
B	5	12	2

Αν μείνει αδιάθετο προϊόν στις αποθήκες έχει μηδενικό κόστος, ενώ το κόστος ανά μονάδα ελλείψεων για τους πελάτες 1, 2 και 3 είναι ίσο με 6, 6 και 5, αντίστοιχα.
Να βρεθεί ο τρόπος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες στους πελάτες που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Λύση
Παρατηρούμε ότι $\sum_{j=1}^{3} b_j = 180 + 170 + 150 = 500 > 400 = 200 + 200 = \sum_{i=1}^{2} a_i$, Δηλαδή η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από την παραγωγή. Συνεπώς εισάγουμε υποθετικό σταθμό παραγωγής, έστω αποθήκη Γ με δυνατότητα παραγωγής $a_3 = 500 - 400 = 100$.

	1	2	3	
A	8	9	4	200
B	5	12	2	200
Γ	6	6	5	100
	180	170	150	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου

	1	2	3		
A	8 30	9 170	4 0	~~200~~	~~170~~
B	5 50	12 0	2 150	~~200~~	~~50~~
Γ	6 100	6 0	5 0	~~100~~	
	~~180~~ ~~130~~ ~~30~~	~~170~~	~~150~~		

Παρατηρούμε ότι η βασική εφικτή λύση που έχει βρεθεί με την μέθοδο ελαχίστου στοιχείου είναι μη εκφυλισμένη καθώς έχει $m + n - 1 = 5$ θετικά στοιχεία. Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι $R_0 = 30 \cdot 8 + 170 \cdot 9 + 50 \cdot 5 + 150 \cdot 2 + 100 \cdot 6 = 2920$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των δυναμικών θα ελέγξουμε αν η λύση που έχει προκύψει είναι άριστη.

$u \backslash v$	8	9	5	
0	8 - 30	9 170	1 / 4 + 0	~~200~~
-3	5 + 50	-6 / 12 0	2 - 150	~~200~~
-2	6 100	-1 / 6 0	-2 / 5 0	~~100~~
	~~180~~	~~170~~	~~150~~	

Εφόσον υπάρχουν θετικές διαφορές δ_{ij}, συγκεκριμένα $\delta_{13} = 1$, η παραπάνω λύση δεν είναι άριστη. Βρίσκουμε μια καλύτερη λύση κάνοντας βασική τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην θετική διαφορά, άρα κάνουμε βασικά την μεταβλητή x_{13}. Είναι $\theta_0 = min\{30, 150\} = 30$ και άρα η νέα βασική εφικτή λύση δίνεται από το επόμενο tableau.

$u \backslash v$	7	9	4	
0	-1 / 8 0	9 170	1 / 4 30	~~200~~
-2	5 80	-5 / 12 0	2 120	~~200~~
-1	6 100	-2 / 6 0	-2 / 5 0	~~100~~
	~~180~~	~~170~~	~~150~~	

Εφόσον $\delta_{ij} < 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα το τελευταίο tableau είναι το μοναδικό άριστο tableau σχεδίου μεταφοράς. Το συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $R_1 = R_0 - \theta_0\delta_{13} = 2920 - 30 \cdot 1 = 2890$.

Συνεπώς ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες είναι:

από την αποθήκη A θα μεταφερθούν ποσότητες 170 και 30 πρός τους πελάτες 2 και 3 αντίστοιχα.

από την αποθήκη B θα μεταφερθούν ποσότητες 80 και 120 πρός τους πελάτες 1 και 3 αντίστοιχα.

από την αποθήκη Γ θα μεταφερθεί ποσότητα 100 πρός τον πελάτη 1, δηλαδή ο πελάτης 1 θα παρουσιάσει έλλειψη 100 μονάδων προϊόντος.

2.4.2 Άσκηση 2^{η}

Μία τράπεζα έχει 3 γραφεία στα οποία γίνεται η επεξεργασία των επιταγών. Το γραφείο 1 μπορεί να διεκπεραιώσει 10.000 επιταγές την εβδομάδα, το γραφείο 2 9000 και το γραφείο 3 6.000. Η τράπεζα έχει 4 τύπους επιταγών: Προσωπικές(Π), Εμπορικές(Ε), Δημοσίου(Δμ) και Διεθνείς(Δθ). Κατά μέσο όρο ο εβδομαδιαίος αριθμός επιταγών προς διεκπεραίωση είναι 1000 διεθνείς και 8000 για καθένα από τους άλλους τρεις τύπους. Το κόστος διεκπεραίωσης ανά επιταγή εξαρτάται τόσο από το γραφείο όσο και από τον τύπο της επιταγής και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα (σε λεπτά του ευρώ)

	Τύπος επιταγής			
Γραφείο	Προσωπική	Εμπορική	Δημοσίου	Διεθνής
1	25	12	14	38
2	29	15	9	37
3	26	18	12	40

Να βρεθεί με ποιο τρόπο πρέπει να γίνει η κατανομή των επιταγών στα γραφεία ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος διεκπεραίωσης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $10000 + 9000 + 6000 = 1000 + 8000 + 8000 + 8000 = 25000$.

	Π	Ε	Δμ	Δθ	
1	25	12	14	38	10000
2	29	15	9	37	9000
3	26	18	12	40	6000
	8000	8000	8000	1000	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου.

	Π	Ε	Δμ	Δθ	
1	^{25} 2000	^{12} 8000	^{14} 0	^{38} 0	~~10000~~ ~~2000~~
2	^{29} 0*	^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	~~9000~~ ~~1000~~
3	^{26} 6000	^{18} 0	^{12} 0	^{40} 0	~~6000~~
	~~8000~~	~~8000~~	~~8000~~	~~1000~~	

~~6000~~

Παρατηρούμε ότι κατά τη συμπλήρωση του πίνακα μηδενίζεται ταυτόχρονα η αντίστοιχη γραμμή και στήλη. Για το λόγο αυτό η λύση που προκύπτει είναι εκφυλισμένη, δηλαδή έχει λιγότερες από $m+n-1=3+4-1=6$ βασικές μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή βάζουμε ένα αστερίσκο σε κάποιο από τα μηδενικά που δημιουργούνται όταν μηδενίσουμε τη γραμμή και τη στήλη (συνήθως προτιμούμε αυτό με το ελάχιστο κόστος).

Για τη λύση αυτή το συνολικό κόστος είναι $R_0 = 25\cdot 2000 + 12\cdot 8000 + 29\cdot 0 + 9\cdot 8000 + 37\cdot 1000 + 26\cdot 6000 = 411.000$λεπτά του ευρώ ή 4110 ευρώ. Θα ελέγξουμε με τη μέθοδο των δυναμικών αν η λύση αυτή είναι άριστη.

$u \backslash v$	25	12	5	33	
0	^{25} 2000	^{12} 8000	-9 ^{14} 0	-5 ^{38} 0	10000
4	^{29} 0*	1 ^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	9000
1	^{26} 6000	-5 ^{18} 0	-6 ^{12} 0	-6 ^{40} 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Η λύση αυτή δεν είναι άριστη αφού υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ ($\delta_{22} = 1$). Έτσι η μεταβλητή x_{22} που αντιστοιχεί στη θετική διαφορά θα γίνει τώρα βασική.

$u \backslash v$	25	12	5	33	
0	+ ^{25} 2000	- ^{12} 8000	-9 ^{14} 0	-5 ^{38} 0	10000
4	- ^{29} 0*	1 + ^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	9000
1	^{26} 6000	-5 ^{18} 0	-6 ^{12} 0	-6 ^{40} 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Είναι $\theta_0 = \min\{0, 8000\} = 0$. Εφόσον η x_{22} έγινε τώρα βασική και είναι 0 η τιμή της, βάζουμε εκεί αστερίσκο και υπολογίζουμε και πάλι τα δυναμικά για να ελέγξουμε αν η λύση αυτή είναι άριστη.

$u \backslash v$	25	12	6	34	
0	25 2000	12 8000	-8 14 0	-4 38 0	10000
3	-1 29 0	15 0*	9 8000	37 1000	9000
1	26 6000	-5 18 0	-5 12 0	-5 40 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Αυτό το tableau είναι άριστο εφόσον όλα τα $\delta_{ij} < 0$. Σύμφωνα με αυτή, το πρώτο γραφείο θα διεκπεραιώσει 2000 Προσωπικές και 8000 Εμπορικές επιταγές, το δεύτερο γραφείο 8000 Δημοσίου και 1000 Διεθνείς ενώ το τρίτο γραφείο 6000 Προσωπικές. Το συνολικό κόστος, εφόσον $\theta_0 = 0$ δεν μεταβάλλεται και είναι ίσο με το R_0.

2.4.3 Άσκηση 3^η

Ένας εκπαιδευτικός οργανισμός έχει σχολεία σε τρεις τοποθεσίες με δυναμικότητα μαθητών 200, 400 και 400 αντίστοιχα. Οι μαθητές προέρχονται από 4 διαφορετικές περιοχές. Συγκεκριμένα, 120 μαθητές προέρχονται από την περιοχή 1, 240 από την περιοχή 2, 450 από την περιοχή 3 και 190 από την περιοχή 4. Οι μαθητές μετακινούνται με λεωφορεία του οργανισμού. Το κόστος μεταφοράς ανά μαθητή από κάθε περιοχή σε κάθε σχολείο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Σχολείο		
Περιοχή	1	2	3
1	5	2	1
2	4	3	4
3	2	4	7
4	3	3	6

Να βρεθεί η κατανομή των μαθητών από κάθε περιοχή σε κάθε σχολείο έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $200 + 400 + 400 = 120 + 240 + 450 + 190 = 1000$.

	1	2	3	
1	^{5}	^{2}	^{1}	120
2	^{4}	^{3}	^{4}	240
3	^{2}	^{4}	^{7}	450
4	^{3}	^{3}	^{6}	190
	200	400	400	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου.

	1	2	3		
1	^{5} 0	^{2} 0	^{1} 120	~~120~~	
2	^{4} 0	^{3} 210	^{4} 30	~~240~~	~~30~~
3	^{2} 200	^{4} 0	^{7} 250	~~450~~	~~250~~
4	^{3} 0	^{3} 190	^{6} 0	~~190~~	
	~~200~~	~~400~~	~~400~~		

Για τη λύση αυτή το συνολικό κόστος είναι $R_0 = 1 \cdot 120 + 3 \cdot 210 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 200 + 7 \cdot 250 + 3 \cdot 190 = 3590$. Ελέγχουμε με τη μέθοδο των δυναμικών αν η λύση αυτή είναι άριστη.

		~~210~~	~~280~~	
$u \backslash v$	-4	0	1	
0	-9 ^{5} 0	-2 ^{2} 0	^{1} 120	120
3	-5 ^{4} 0	^{3} − 210	^{4} + 30	240
6	^{2} 200	2 ^{4} + 0	^{7} − 250	450
3	-4 ^{3} 0	^{3} 190	-2 ^{6} 0	190
	200	400	400	

Η λύση αυτή δεν είναι άριστη αφού υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ ($\delta_{32} = 2$). Είναι $\theta_0 = \min\{210, 250\} = 210$. Έτσι, συνεχίζουμε στο επόμενο tableau στο οποίο η μεταβλητή x_{32} γίνεται τώρα βασική.

$u \backslash v$	-4	-2	1	
0	-9 ^{5} 0	-4 ^{2} 0	^{1} 120	120
3	-5 ^{4} 0	-2 ^{3} 0	^{4} 240	240
6	^{2} 200	^{4} 210	^{7} 40	450
5	-4 ^{3} 0	^{3} 190	0 ^{6} 0	190
	200	400	400	

Η λύση είναι άριστη αφού όλα τα $\delta_{ij} \leq 0$. Το κόστος για αυτή τη λύση είναι $R_1 = R_0 - \delta_{32} \cdot \theta_0 = 3590 - 2 \cdot 210 = 3170$. Σύμφωνα με τη λύση 120 παιδιά της περιοχής 1 θα πάνε στο σχολείο 3, 210 παιδιά της περιοχής 2 θα πάνε στο σχολείο 2 και τα υπόλοιπα 30 στο σχολείο 3, 200 παιδιά από την περιοχή 3 θα πάνε στο σχολείο 1 και 250 στο σχολείο 3 ενώ και τα 190 παιδιά της περιοχής 4 θα πάνε στο σχολείο 2.

Επειδή υπάρχει ένα $\delta_{ij} = 0$ ($\delta_{43} = 0$) αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση η οποία υπολογίζεται κάνοντας βασική μεταβλητή αυτή για την οποία $\delta_{ij} = 0$. Στην περίπτωσή μας η μεταβλητή x_{43} θα γίνει τώρα βασική, ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη της περίπτωσης που $\delta_{ij} > 0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω tableau. Προφανώς αλλάζει ο τρόπος κατανομής των παιδιών στα σχολεία αλλά το κόστος μεταφοράς τους παραμένει το ίδιο με το R_1.

u \ v	-4	-2	1	
0	-9 5 0	-4 2 0	1 120	120
3	-5 4 0	-2 3 0	4 240	240
6	2 200	+ 4 210	7 - 40	450
5	-4 3 0	3 - 190	0 6 + 0	190
	200	400	400	

	5 0	2 0	1 120	120
	4 0	3 0	4 240	240
	2 200	4 250	7 0	450
	3 0	3 150	6 40	190
	200	400	400	