

Θέμα 1. (α) Έστω π.γ.π. σε κανονική μορφή: $z = \max c'x$, $Ax = b$, $x \geq 0$, όπου $A \in M_{m \times n}$, με $r(A) = m < n$. Δείξτε ότι κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής αντιστοιχεί σε μια βασική εφικτή λύση.

(β) Δύο βιοτεχνίες B_1, B_2 παράγουν ένα προϊόν σε ποσότητες 200 και 300 μονάδων αντίστοιχα και επιθυμούν αυτό να μεταφερθεί σε τρία καταστήματα, K_1, K_2, K_3 , τα οποία ζητούν 250, 160 και 90 μονάδες αντίστοιχα. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς, με δεδομένο ότι το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος από τη B_1 στα K_1, K_2, K_3 είναι 15, 18 και 16 ευρώ, ενώ από τη B_2 στα K_1, K_2, K_3 είναι 17, 13 και 20 ευρώ αντίστοιχα. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση (όχι επίλυση) του προβλήματος ως π.γ.π. όταν το K_3 αποφασίζει τελικά ότι θέλει 120 μονάδες προϊόντος ενώ το κόστος παραγωγής κάθε μονάδας επιπλέον των 200, 300 για τις B_1, B_2 επιβαρύνεται με επιπρόσθετο ποσό 8 ευρώ.

Θέμα 2.

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \min \quad & (4x_1 + 5x_2) \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -2x_1 - x_2 \geq -7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να βρεθεί η άριστη λύση γραφικά.

(β) Να βρεθεί η άριστη λύση με τη μέθοδο Simplex.

(γ) Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού προβλήματος χρησιμοποιώντας την απάντηση στο (β).

Θέμα 3. Ένας επενδυτής έχει αποφασίσει να αγοράσει ένα διαμέρισμα αξίας 250.000 ευρώ, η εξόφληση του οποίου θα γίνει στους επόμενους 3 μήνες. Τον πρώτο μήνα θα πρέπει να καταβάλει 150.000 ευρώ, το δεύτερο 40.000 και τον τρίτο 60.000 ευρώ. Ο επενδυτής θα χρηματοδοτήσει την αγορά πουλώντας τριών ειδών ομόλογα που έχει στη διάθεσή του. Συγκεκριμένα έχει ομόλογα δημοσίου αξίας 100.000 ευρώ, ευρωπαϊκά αξίας 80.000 ευρώ, τραπεζών αξίας 50.000 ευρώ και ιδιωτικών εταιρειών αξίας 20.000 ευρώ. Η πώληση των ομολόγων επιφέρει χρηματικές ποινές ανάλογα με το είδος του ομολόγου και το μήνα πώλησης. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την ποινή εξόφλησης ανά 1.000 ευρώ για κάθε είδος ομολόγου και μήνα εξόφλησης.

Ομόλογα	Μήνας		
	1	2	3
Δημοσίου	250	200	150
Ευρωπαϊκά	200	150	100
Τραπεζών	150	120	80
Ιδιωτικά	100	80	50

Να βρεθεί ο τρόπος εξόφλησης των ομολόγων έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ποινή εξόφλησης.

Θέμα 4. Ένα εργαστήριο επίπλων έχει παραγγελίες για παράδοση ενός αριθμού βιβλιοθηκών κατά τις επόμενες 5 εβδομάδες, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Εβδομάδα	1	2	3	4	5
Αριθμός Βιβλιοθηκών	1	2	4	2	1
Κόστος Παραγωγής ανά μονάδα	120	80	90	100	140

Για κάθε εβδομάδα που παράγεται έστω και μία βιβλιοθήκη υπάρχει ένα εφάπαξ κόστος προγραμματισμού και έναρξης παραγωγής ίσο με 300 ευρώ, ενώ το καθαυτό κόστος κατασκευής ανά μονάδα μεταβάλλεται για κάθε εβδομάδα και δίνεται επίσης στον προηγούμενο πίνακα. Κάθε εβδομάδα το εργαστήριο έχει δυνατότητα παραγωγής το πολύ 4 βιβλιοθηκών, ενώ μπορεί να αποθηκεύει μέχρι 3 βιβλιοθήκες. Το κόστος αποθήκευσης είναι 40 ευρώ για κάθε βιβλιοθήκη ανά εβδομάδα.

Να βρεθεί βέλτιστη πολιτική παραγωγής και αποθεμάτων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Υποθέστε ότι στην αρχή της πρώτης εβδομάδας δεν υπάρχουν διαθέσιμες βιβλιοθήκες και ότι τόσο η παραγωγή όσο και η πώληση των βιβλιοθηκών γίνονται ακαριαία στην αρχή κάθε εβδομάδας.