Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 1

I. Ασκήσεις

1. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Δείξτε ότι

$$f_\theta(0) \geq f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η «μέγιστη τομή» του K με υπερεπίπεδο κάθετο στο θ είναι εκείνη που περνάει από το κέντρο συμμετρίας του.

2. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε το $A \cap B$ να έχει όγκο, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

Συμπέρασμα: Αν $\mu_B(M) = a > 1/2$, δηλαδή αν το M τέμνει «παραπάνω από το μισό» B, τότε το ποσοστό του B που μένει έξω από το tM φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς το $t \to \infty$ (για παράδειγμα, αν $\mu_B(M) = 2/3$ τότε $1 - \mu_B(tM) \leq 2^{-t/2}$ για κάθε $t > 1$).

3. Αυτό το πρόβλημα δείχνει ότι (για μεγάλες διαστάσεις) δύο υποσύνολα της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας μπορούν να έχουν «σχετικά μεγάλη» απόσταση μόνο αν κάποιο από τα δύο είναι «πολύ μικρό».

Έστω A και C δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της B_2^n. Υποθέτουμε ότι

$$d(A, C) = \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\frac{A + C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}B_2^n.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε $a \in A$ και $c \in C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.]

(β) Δείξτε ότι

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|B_2^n|.$$

4. Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x + T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x + T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Δείξτε ότι $|K \cap (x + T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

II. Ανισότητα Prékopa–Leindler

Η ανισότητα Prékopa–Leindler είναι μια γενίκευση της ανισότητας Brunn–Minkowski στο πλαίσιο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων: Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0, 1)$. Υποθέτουμε ότι οι f, g και h είναι ολοκληρώσιμες και ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{2}$$

Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n και θα δούμε πώς, επιλέγοντας κατάλληλα τις f, g και h, μπορούμε να πάρουμε σαν πόρισμα την ανισότητα Brunn–Minkowski.

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $n = 1$ και ότι οι f, g, h είναι συνεχείς και γνησίως θετικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1).

(α) Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f(u)du = t \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g(u)du = t \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du.$$

Δείξτε ότι οι x, y είναι παραγωγίσιμες και ότι για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \quad \text{και} \quad y'(t)g(y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du.$$

(β) Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t).$$

Δείξτε ότι η z είναι γνησίως αύξουσα. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $z \mapsto \log z$ είναι κοίλη, δείξτε ότι

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}.$$

(γ) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$ και χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du \geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du\right)^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du\right)^{1-\lambda}.$$

2. Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι η ανισότητα Prékopa–Leindler έχει αποδειχθεί για διαστάσεις $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς και γνησίως θετικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1). Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_s, g_s, h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με

$$f_s(w) = f(w,s), \quad g_s(w) = g(w,s), \quad h_s(w) = h(w,s).$$

(α) Χρησιμοποιώντας την (1) δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda}.$$

(β) Θεωρήστε τις συναρτήσεις $F, G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζονται από τις

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_s(w)dw, \quad G(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_s(w)dw, \quad H(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_s(w)dw.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση και το (α) δείξτε ότι: για κάθε $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$,

$$H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) \geq F(s_1)^{\lambda} G(s_0)^{1-\lambda}.$$

(γ) Εφαρμόζοντας ξανά την επαγωγική υπόθεση (για $n = 1$) για τις συναρτήσεις F, G και H, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

3. Έστω A και B δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Δείξτε ότι: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, ισχύει η

$$\chi_{\lambda A + (1-\lambda)B}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \chi_A(x)^{\lambda} \chi_B(y)^{1-\lambda}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa–Leindler, δείξτε ότι

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{3}$$

[*Σημείωση: Οι χ_A, χ_B και $\chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}$ δεν είναι συνεχείς ούτε γνήσια θετικές. Αποδεικνύεται όμως ότι η ανισότητα Prékopa–Leindler ισχύει στο ευρύτερο πλαίσιο των μη αρνητικών Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων: η επέκταση γίνεται με κατάλληλο επιχείρημα προσέγγισης από συνεχείς θετικές συναρτήσεις.*]

4. Έστω A και B δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $|A| > 0$ και $|B| > 0$. Εφαρμόζοντας την (3) με

$$\lambda = \frac{|A|^{1/n}}{|A|^{1/n} + |B|^{1/n}} \quad \text{και} \quad 1-\lambda = \frac{|B|^{1/n}}{|A|^{1/n} + |B|^{1/n}}$$

για τα σύνολα

$$A_1 = \frac{1}{|A|^{1/n}}A \quad \text{και} \quad B_1 = \frac{1}{|B|^{1/n}}B$$

δείξτε ότι

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_A e^{-\|x\|_2^2/2}dx.$$

Το γ_n είναι το *μέτρο του Gauss* στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler δείξτε ότι: αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq \big(\gamma_n(A)\big)^{\lambda}\big(\gamma_n(B)\big)^{1-\lambda}.$$

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A) \leq \gamma_n(A+x) \leq \gamma_n(A).$$