Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 4

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 3 ως την Παρασκευή 30 Οκτωβρίου 2009.

I. Ασκήσεις

1. (α) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(β) Έστω S, T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}(S+T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$. Ισχύει πάντα ισότητα;

2. Έστω $m \geq n+1$, $d > 0$ και $C_1, \ldots, C_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1}$ τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(y, C_{i_j}) \leq d$ για κάθε $j = 1, \ldots, n+1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $d(x, C_i) \leq d$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

3. Δίνονται $\theta_1, \ldots, \theta_k \in S^{n-1}$ και $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \leq t_i\}$$

είναι μη κενό και φραγμένο. Δείξτε ότι: αν το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}$ (όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $t \in \mathbb{R}$) ικανοποιεί την $P \cap H = \emptyset$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq k$ ώστε το $P' = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_{i_j} \rangle \leq t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P' \supseteq P$ και $P' \cap H = \emptyset$.

4. Δίνονται n σημεία $x_1, \ldots, x_n$ στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1 \perp \ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $[n/4]$ από τα σημεία x_i.

5. Έστω $T(n, r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $|A| = m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_r \subset A$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{conv}(A_i) \neq \emptyset.$$

Δείξτε ότι

$$T(n, r_1 r_2) \leq T(n, r_1) T(n, r_2)$$

για κάθε $r_1, r_2 \geq 2$.

6*. Δίνονται μη κενές οικογένειες $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n+1}$ συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε επιλογή $C_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$ ισχύει $C_1 \cap \cdots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε όλα τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}_i$ να έχουν κάποιο κοινό σημείο.

II. Το θεώρημα του Krasnosselsky

Έστω S ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x, y \in S$ τότε λέμε ότι το y είναι *ορατό* από το x αν το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ περιέχεται στο S. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα του Krasnosselsky.

> *Έστω S μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $y_1, \ldots, y_{n+1} \in S$ τότε υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε y_i να είναι ορατό από το x. Τότε, υπάρχει $x \in S$ ώστε κάθε $y \in S$ να είναι ορατό από το x.*

(α) Για κάθε $x \in S$ θεωρούμε το σύνολο S_x όλων των $y \in S$ τα οποία είναι ορατά από το x. Δείξτε ότι το S_x είναι κλειστό. Συνεπώς, το σύνολο $C_x = \mathrm{conv}(S_x)$ είναι συμπαγές και κυρτό.

(β) Θεωρούμε την οικογένεια $\{C_x \mid x \in S\}$. Δείξτε ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Συνεπώς,

$$\bigcap_{x \in S} C_x \neq \emptyset.$$

(γ) Θεωρούμε $a \in \bigcap_{x \in S} C_x$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $b \in S$ και c στο ευθύγραμμο τμήμα (a, b) ώστε $c \notin S$. Θεωρούμε μια κλειστή μπάλα B με κέντρο το c ώστε $S \cap B = \emptyset$ και την μεταφέρουμε κατά ένα πολλαπλάσιο του $b - c$ ώστε να «ακουμπήσει» το S. Δηλαδή, βρίσκουμε τον μικρότερο $t > 0$ για τον οποίο $[t(b - c) + B] \cap S \neq \emptyset$. Η μπάλα $D = t(b - c) + B$ έχει κοινά σημεία με το S αλλά $\mathrm{int}(D) \cap S = \emptyset$. Δείξτε ότι: αν $x \in D \cap S$, τότε $a \notin C_x$. Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο.