Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 5

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 4 ως την Παρασκευή 13 Νοεμβρίου 2009.

I. Ασκήσεις

1. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $(1/r)\mathbb{Z}^n$. Συμβολίζουμε με N_r τον πληθάριθμο του συνόλου $K \cap (1/r)\mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|K|}{N_r(1/r)^n} = 1.$$

2. (Mordell) Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| > m$. Τότε, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $K + z$ να περιέχει τουλάχιστον $m + 1$ διακεκριμένα ακέραια σημεία.

3. (van der Corput) Έστω $m \in \mathbb{N}$, και K ένα ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με όγκο $|K| > 2^n m$. Τότε, το K περιέχει τουλάχιστον m ζευγάρια ακεραίων σημείων $\pm u_j \neq 0$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Mordell.

4. (Mahler) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Ο *συντελεστής ασυμμετρίας* του K ως προς το 0 είναι ο μικρότερος $\sigma = \sigma(K) > 0$ για τον οποίο

$$x \in K \Longrightarrow -x \in \sigma K.$$

Δείξτε ότι: αν $|K| > (1 + \sigma(K))^n$, τότε $K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

5* (Pick) Έστω K κυρτό πολύγωνο με κορυφές σημεία του $\mathbb{Z}^2$. Δείξτε ότι το πλήθος των σημείων του $K \cap \mathbb{Z}^2$ είναι ίσο με

$$A(K) + \frac{|\mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{bd}(K)|}{2} + 1,$$

όπου $A(K)$ το εμβαδόν του K και $\mathrm{bd}(K)$ το σύνορο του K.

II. Άλλες έννοιες από τη γεωμετρία των αριθμών: κρίσιμη ορίζουσα και packings της μπάλας

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$, λέγεται **αποδεκτό** για το K, αν το μόνο σημείο του Λ που ανήκει στο εσωτερικό του K είναι το 0.

Αν $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ όπου $T \in GL(n)$, ορίζουμε $\det \Lambda = |\det T|$. Η **κρίσιμη ορίζουσα** $\Delta(K)$ του K είναι το $\inf(\det \Lambda)$, όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα πλέγματα Λ που είναι αποδεκτά για το K.

(α) Δείξτε ότι:

1. Αν $K \subseteq W$, τότε $\Delta(K) \leq \Delta(W)$.
2. Για κάθε $t > 0$, $\Delta(tK) = t^n \Delta(K)$.
3. Αν $T \in GL(n)$, τότε $\Delta(T(K)) = |\det T|\Delta(K)$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\Delta(K) \geq 2^{-n}|K|.$$

(γ) Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_n$ την κλάση όλων των ελλειψοειδών του $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ και ορίζουμε

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}.$$

Δείξτε ότι

$$\Delta(B_2^n)\alpha_n = \omega_n.$$

Μια οικογένεια $P=\{x_i+rB_2^n : i\in I\}$ από μπάλες ακτίνας $r>0$, λέγεται **packing** αν οι $x_i+rB_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά. Ορίζουμε άνω και κάτω **πυκνότητα** του P ως εξής: για κάθε $R>0$, θεωρούμε την RB_2^n, και τις $x_i+rB_2^n$ οι οποίες τέμνουν την RB_2^n. Αν $N(R)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του $\{i\in I : (x_i+rB_2^n)\cap(RB_2^n)\neq\emptyset\}$, ορίζουμε

$$\overline{\delta}(P)=\limsup_{R\to\infty}\frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}$$

και

$$\underline{\delta}(P)=\liminf_{R\to\infty}\frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}.$$

Οι αριθμοί $\overline{\delta}(P)$ και $\underline{\delta}(P)$ είναι η άνω και κάτω πυκνότητα του P, αντίστοιχα. Αν $\overline{\delta}(P)=\underline{\delta}(P)$, τότε αυτή η κοινή τιμή είναι η πυκνότητα $\delta(P)$ του P.

Έστω Λ ένα πλέγμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα **packing με κέντρα στο** Λ είναι ένα packing της μορφής

$$P=\{x+rB_2^n : x\in\Lambda\}.$$

(δ) Έστω $P=\{x+rB_2^n : x\in\Lambda\}$ ένα packing με κέντρα στο πλέγμα Λ. Δείξτε ότι

$$\delta(P)=\frac{\omega_n r^n}{\det\Lambda}.$$

(ε) Ορίζουμε δ_n το supremum των $\delta(P)$, όπου P packing με μπάλες ακτίνας 1 και κέντρα σε κάποιο πλέγμα Λ του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\alpha_n=2^n\delta_n$.