Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδια 8 και 9

Παράδοση των ασκήσεων των Φυλλαδίων 7, 8 και 9 ως την Παρασκευή 15 Ιανουαρίου 2010.

I. Φυλλάδιο 8

1. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση και έστω ότι $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει αφινική συνάρτηση $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

2. Έστω V μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:V\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν C είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του V τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο C.

3. Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:C\to\mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$\langle \nabla f(x)-\nabla f(y), x-y\rangle\geq 0$$

για κάθε $x,y\in C$.

(β) Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x\in C$ και για κάθε $u\in\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)u_iu_j\geq 0.$$

4. Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\mathrm{dist}(x,C)$.

(α) Έστω $x\notin C$. Δείξτε ότι

$$\nabla f(x)=\frac{x-p_C(x)}{\|x-p_C(x)\|_2}.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n\setminus C$.

5. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το *υποδιαφορικό* της f στο x είναι το σύνολο

$$\partial f(x)=\{v\in\mathbb{R}^n: f(y)\geq f(x)+\langle v,y-x\rangle\ \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}^n\}.$$

(α) Δείξτε ότι το $\partial f(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

(β) Δείξτε ότι

$$\partial f(x)=\{v\in\mathbb{R}^n:\langle v,u\rangle\leq f'(x;u)\text{ για κάθε } u\neq 0\},$$

όπου $f'(x;u)$ είναι η παράγωγος της f στην κατεύθυνση του u στο σημείο x.

(γ) Δείξτε ότι: αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε $\partial f(x)=\{\nabla f(x)\}$.

II. Φυλλάδιο 9

1. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το σύνολο των ακραίων σημείων του C είναι κλειστό.

2. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $x\in\mathbb{R}^n$ είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(A)$ αν και μόνο αν $x\in A$ και $x\notin\mathrm{conv}(A\setminus\{x\})$.

3. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\mathrm{ext}(C)\neq\emptyset$ αν και μόνο αν το C δεν περιέχει καμία ευθεία.

4. Δείξτε ότι κάθε πολύεδρο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.

5. Δείξτε ότι κάθε πολύτοπο έχει πεπερασμένες το πλήθος έδρες.