Κυρτή Ανάλυση – Ασκήσεις

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ανισότητα Brunn-Minkowski και εκτιμήσεις όγκων

1. *Δίνονται δύο ορθογώνια $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ και $I_2 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν επικαλύπτονται (έχουν ξένα εσωτερικά). Δείξτε ότι υπάρχουν $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε το υπερεπίπεδο $\{x : x_j = t\}$ να διαχωρίζει τα I_1 και I_2 (δηλαδή, είτε $I_1 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ ή $I_1 \subseteq \{x : x_j \geq t\}$ και $I_2 \subseteq \{x : x_j \leq t\}$).*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι το ζητούμενο ισχύει αν υπάρχει $j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $b_j \leq c_j$ ή $d_j \leq a_j$.

Από την άλλη πλευρά, αν αυτό δεν ισχύει, τότε για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε $(a_j, b_j) \cap (c_j, d_j) \neq \emptyset$ και επιλέγοντας $y_j \in (a_j, b_j) \cap (c_j, d_j)$ βρίσκουμε σημείο $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{int}(I_1) \cap \mathrm{int}(I_2)$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση*

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Δείξτε ότι

$$f_\theta(0) \geq f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = e_n$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$K(t) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, t) \in K\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $K \cap (e_n^\perp + te_n) = K(t) + te_n$. Συνεπώς,

$$f(t) = |K(t)|.$$

Παρατηρούμε ότι $K(-t) = -K(t)$: αν $y \in K(-t)$ τότε $(y, -t) \in K$ και αφού το K είναι συμμετρικό έχουμε $(-y, t) \in K$, δηλαδή $-y \in K(t)$. Αυτό δείχνει ότι $K(-t) \subseteq -K(t)$ και ο άλλος εγκλεισμός αποδεικνύεται όμοια. Έπεται ότι

$$f(-t) = |K(-t)| = |-K(t)| = |K(t)| = f(t),$$

δηλαδή η f είναι άρτια.

Από την κυρτότητα του K μπορούμε να ελέγξουμε ότι: αν τα $K(t), K(s)$ είναι μη κενά, τότε για κάθε $a \in (0,1)$ ισχύει

$$K((1-a)t + as) \supseteq (1-a)K(t) + aK(s).$$

Από την ανισότητα Brunn–Minkowski (στον $\mathbb{R}^{n-1}$) έπεται ότι

$$f((1-a)t + as) = |K((1-a)t + as)| \geq |K(t)|^{1-a}|K(s)|^{a} = f(t)^{1-a}f(s)^{a}.$$

Δηλαδή, η f είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της. Ειδικότερα, αν $f(t) > 0$ έχουμε

$$f(0) \geq \sqrt{f(t)}\sqrt{f(-t)} = \sqrt{f(t)}\sqrt{f(t)} = f(t).$$

Αν πάλι $f(t) = 0$, τότε η $f(0) \geq f(t)$ εξακολουθεί να ισχύει τετριμμένα.

3. (*το Λήμμα του Borell*) *Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε το $A \cap B$ να έχει όγκο, ορίζουμε*

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) *Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός*

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) *Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το* (α) ιτ και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leq a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \notin tM$ και $y \in M$. Θα δείξουμε ότι $\frac{2}{t+1}x + \frac{t-1}{t+1}y \notin M$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα και θέτουμε $z = \frac{2}{t+1}x + \frac{t-1}{t+1}y$. Τότε $z \in M$ και λύνοντας ως προς x έχουμε

$$x = t\left(\frac{t+1}{2t}z + \frac{t-1}{2t}(-y)\right) \in tM$$

διότι $-y \in M$ αφού το M είναι συμμετρικό ως προς το 0, οι αριθμοί $\frac{t+1}{2t}$ και $\frac{t-1}{t+1}$ ανήκουν στο $(0,1)$ και το άθροισμά τους είναι ίσο με 1. Καταλήξαμε στην $x \in tM$, επομένως έχουμε άτοπο.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το B είναι κυρτό, ελέγχουμε ότι

$$B \cap \left(\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M\right) \supseteq \frac{2}{t+1}B \cap (tM)^c + \frac{t-1}{t+1}B \cap M,$$

και παίρνοντας υπ' όψιν τον προηγούμενο εγκλεισμό συμπεραίνουμε ότι

$$B \cap M^c \supseteq \frac{2}{t+1} B \cap (tM)^c + \frac{t-1}{t+1} B \cap M.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Brunn-Minkowski, παίρνουμε

$$|B \cap M^c| \geq |B \cap (tM)^c|^{\frac{2}{t+1}} \cdot |B \cap M|^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Ισοδύναμα,

$$|B|\mu_B(M^c) \geq \Big(|B|\mu_B((tM)^c)\Big)^{\frac{2}{t+1}} \Big(|B|\mu_B(M)\Big)^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Δηλαδή,

$$\mu_B(M^c) \geq \Big(\mu_B((tM)^c)\Big)^{\frac{2}{t+1}} \Big(\mu_B(M)\Big)^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Θέτοντας $\mu_B(M) = a$ στην τελευταία ανισότητα, έχουμε

$$1 - a \geq \Big(1 - \mu_B(tM)\Big)^{\frac{2}{t+1}} a^{\frac{t-1}{t+1}},$$

απ' όπου προκύπτει η

$$1 - \mu_B(tM) \leq a \left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

4. *Έστω A και C δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της B_2^n. Υποθέτουμε ότι*

$$d(A,C) = \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) *Δείξτε ότι*

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

(β) *Δείξτε ότι*

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|B_2^n|.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in \frac{A+C}{2}$. Υπάρχουν $a \in A, c \in C$ ώστε $x = \frac{a+c}{2}$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου παίρνουμε

$$\left\|\frac{a+c}{2}\right\|_2^2 + \left\|\frac{a-c}{2}\right\|_2^2 = \frac{\|a\|_2^2 + \|c\|_2^2}{2}$$

Όμως, $\|a\|_2 \leq 1$ και $\|c\|_2 \leq 1$ διότι $a, c \in B_2^n$. Επιπλέον, είναι $\left\|\frac{a-c}{2}\right\|_2 \geq \frac{d(A,C)}{2} \geq \frac{\rho}{2}$. Έπεται ότι

$$\|x\|_2^2 \leq 1 - \frac{\rho^2}{4},$$

δηλαδή

$$x \in \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

(β) Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn–Minkowski για τα A, C έχουμε

$$\min\{|A|,|C|\} \leq |A|^{1/2}|C|^{1/2} \leq \left|\frac{A+C}{2}\right| \leq \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2}|B_2^n|.$$

Αφού $\exp(x) \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι

$$\exp(-\rho^2/4) \geq 1-\rho^2/4 \Rightarrow \exp(-\rho^2 n/8) \geq \left(1-\rho^2/4\right)^{n/2}.$$

Συνεπώς,

$$\min\{|A|,|C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8)|B_2^n|.$$

5. *Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.*
(α) *Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K\cap(x+T)]+\frac{1}{2}[K\cap(-x+T)] \subseteq K\cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*
(β) *Δείξτε ότι $|K\cap(x+T)| \leq |K\cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω $z \in \frac{1}{2}[K\cap(x+T)]+\frac{1}{2}[K\cap(-x+T)]$. Τότε υπάρχουν $z_1 \in K\cap(x+T)$ και $z_2 \in K\cap(-x+T)$ ώστε $z=\frac{z_1+z_2}{2}$. Έχουμε $z_1, z_2 \in K$ και το K είναι κυρτό, άρα $z=\frac{z_1+z_2}{2} \in K$. Επίσης, $z_1 \in x+T$, $z_2 \in (-x+T)$, άρα υπάρχουν $y_1, y_2 \in T$ ώστε $z_1 = x+y_1$ και $z_2 = -x+y_2$. Τότε,

$$z = \frac{x+y_1+(-x+y_2)}{2} = \frac{y_1+y_2}{2} \in T,$$

διότι το T είναι κυρτό. Από τα παραπάνω, $z \in K\cap T$.
(β) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία των K και T ως προς το 0 παίρνουμε

$$K\cap(-x+T) = (-K)\cap(-x-T) = (-K)\cap(-(x+T)) = -K\cap(x+T).$$

Ειδικότερα, $|K\cap(-x+T)| = |-K\cap(x+T)| = |K\cap(x+T)|$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε

$$|K\cap T| \geq \sqrt{|K\cap(x+T)|}\sqrt{|K\cap(-x+T)|} = \sqrt{|K\cap(x+T)|}\sqrt{|K\cap(x+T)|} = |K\cap(x+T)|.$$

Ορισμοί για τις ασκήσεις 6–9. Έστω K και T κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο πλήθος μεταφορών x_i+T του T που η ένωσή τους καλύπτει το K. Μπορούμε να ζητήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο K ή να επιλέγονται ελεύθερα στο χώρο. Έτσι, ορίζουμε

$$\overline{N}(K,T) = \min\left\{N \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i+T)\right\}$$

και

$$N(K,T) = \min\left\{N \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists x_1,\dots,x_N \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i+T)\right\}.$$

Λόγω συμπάγειας, οι *αριθμοί κάλυψης* $\overline{N}(K,T)$ και $N(K,T)$ ορίζονται καλά.

6. *Δείξτε ότι αν K, T και M είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\overline{N}(K,M) \leq \overline{N}(K,T) \cdot \overline{N}(T,M).$$

Υπόδειξη. Αν $\overline{N}(K,T)=k$ και $\overline{N}(T,M)=m$, υπάρχουν $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}^n$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(x_i+T)$ και υπάρχουν $y_1,\ldots,y_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T \subseteq \bigcup_{j=1}^{m}(y_j+M)$. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $x_1+y_1, x_1+y_2,\ldots,x_1+y_m,\ldots,x_k+y_1,\ldots,x_k+y_m$ τότε αυτά είναι το πολύ km σημεία του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m}(x_i+y_j+M)$. Δηλαδή το K καλύπτεται από $s \leq km$ το πλήθος μεταφορές του M. Αυτό σημαίνει ότι $\overline{N}(K,M) \leq km$.

7. *Από τους ορισμούς βλέπουμε εύκολα ότι*

$$\overline{N}(K,T) \leq N(K,T).$$

Δείξτε ότι: αν τα K και T είναι συμμετρικά ως προς το 0, τότε

$$N(K,2T) \leq \overline{N}(K,T).$$

Υπόδειξη. Έστω $m=\overline{N}(K,T)$. Τότε, υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(x_i+T)$. Από τον ορισμό του m (το γεγονός ότι είναι το ελάχιστο πλήθος μεταφορών του T που η ένωσή τους καλύπτει το K) προκύπτει εύκολα ότι για κάθε $i=1,\ldots,m$ ισχύει $K \cap (x_i+T) \neq \emptyset$.

Για κάθε $i \in \{1,\ldots,m\}$ επιλέγουμε $y_i \in K \cap (x_i+T)$. Θα δείξουμε ότι $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m}(y_i+2T)$, απ' όπου έπεται άμεσα ότι $N(K,2T) \leq m$.

Έστω $z \in K$. Τότε, υπάρχουν $i \in \{1,\ldots,m\}$ και $t \in T$ ώστε $z = x_i+t$. Από την επιλογή του y_i υπάρχει $s \in T$ ώστε $y_i = x_i+s$. Τότε, $z = y_i+(t-s)$ και $t-s \in T+T=2T$ διότι το T είναι συμμετρικό ως προς το 0. Δηλαδή $z \in y_i+2T$.

8. *Έστω K ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K,\rho B_2^n)$ είναι ο εξής. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $S=\{x_1,\ldots,x_N\}$ του K με την εξής ιδιότητα:*

$$(*) \quad \textit{αν } i \neq j \textit{ τότε } \|x_i-x_j\|_2 \geq \rho.$$

(α) *Δείξτε ότι*

$$N \leq \frac{\left|K+\frac{\rho}{2}B_2^n\right|}{\left|\frac{\rho}{2}B_2^n\right|}.$$

(β) *Δείξτε ότι: για κάθε $\rho>0$ υπάρχει μεγιστικό $S \subset K$ που ικανοποιεί την $(*)$. Με τον όρο «μεγιστικό» εννοούμε ότι το S ικανοποιεί την $(*)$ αλλά αν προσθέσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $z \in K \setminus S$ στο S, τότε το $S \cup \{z\}$ δεν ικανοποιεί την $(*)$. Λέμε ότι το S είναι ένα ρ-δίκτυο.*

(γ) *Δείξτε ότι αν $S=\{x_1,\ldots,x_N\}$ είναι ένα ρ-δίκτυο στο K, τότε*

$$N(K,\rho B_2^n) \leq N.$$

Υπόδειξη. (α) Το σύνολο $K+\frac{\rho}{2}B_2^n$ περιέχει τις μπάλες $x_i+\frac{\rho}{2}B_2^n$, $i=1,2,\ldots,N$ οι οποίες έχουν όλες όγκο ίσο με $|B_2^n|$ (ο όγκος είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές). Οι μπάλες $x_i+\frac{\rho}{2}B_2^n$

έχουν ξένα εσωτερικά (αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι $\|x_i - x_j\|_2 \geq \rho$ αν $i \neq j$). Από τη μονοτονία του όγκου έχουμε

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{N}(x_i + \frac{\rho}{2}B_2^n)\Big| \leq \Big|K + \frac{\rho}{2}B_2^n\Big|$$

και από την προσθετικότητα του όγκου,

$$N\Big|\frac{\rho}{2}B_2^n\Big| \leq \Big|K + \frac{\rho}{2}B_2^n\Big|.$$

Έπεται ότι

$$N \leq \frac{\Big|K + \frac{\rho}{2}B_2^n\Big|}{\Big|\frac{\rho}{2}B_2^n\Big|}.$$

(β) Θεωρούμε όλα τα υποσύνολα $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$ του K που ικανοποιούν την $(*)$. Από το (α) κάθε τέτοιο T έχει πλήθος στοιχείων φραγμένο από $\frac{|K+\frac{\rho}{2}B_2^n|}{|\frac{\rho}{2}B_2^n|}$. Συνεπώς, ορίζεται ο

$$k_0 := \max\{k : \text{υπάρχει } T = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset K \text{ που ικανοποιεί την } (*)\}.$$

Κάθε $S \subset K$ που ικανοποιεί την $(*)$ και έχει πλήθος στοιχείων $|S| = k_0$ είναι μεγιστικό (εξηγήστε γιατί).

(γ) Αν $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ είναι ένα ρ-δίκτυο στο K, τότε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \rho)$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in K$ ώστε $\|x - x_i\|_2 \geq \rho$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$, τότε το $S \cup \{x\}$ θα ικανοποιούσε την $(*)$ και θα είχε πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από αυτό του S, αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί αφφού το S είναι μεγιστικό ως προς αυτή την ιδιότητα. Άρα, υπάρχει κάποιο $x_i \in S$ ώστε $\|x - x_i\|_2 < \rho$, δηλαδή $x \in B(x_i, \rho)$.

Αφού $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \rho)$, από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης παίρνουμε $N(K, \rho B_2^n) \leq N$.

9. *Δείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0,1)$,*

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε την Άσκηση 8 με $K = B_2^n$. Έχουμε $|B_2^n + \frac{\rho}{2}B_2^n| = \left(1 + \frac{\rho}{2}\right)^n |B_2^n|$ και $|\frac{\rho}{2}B_2^n| = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n |B_2^n|$. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \frac{\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)^n |B_2^n|}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n |B_2^n|} = \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

10*. *Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset S^{n-1}$ με την εξής ιδιότητα: αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \sqrt{2}$. Δείξτε ότι $N \leq 2n$.*

11. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n είναι το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler δείξτε ότι: αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\gamma_n\Big(\lambda A + (1-\lambda)B\Big) \geq \Big(\gamma_n(A)\Big)^{\lambda} \Big(\gamma_n(B)\Big)^{1-\lambda}.$$

Υπόδειξη. Έστω A, B σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}\gamma_n \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \gamma_n\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \gamma_n\right)^{1-\lambda}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Prékopa–Leindler για τις συναρτήσεις $\chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}\gamma_n$, $\chi_A\gamma_n$ και $\chi_B\gamma_n$. Πρέπει να ελέγξουμε ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(\lambda x + (1-\lambda)y)\gamma_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \chi_A(x)^{\lambda}\chi_B(y)^{1-\lambda}\gamma_n(x)^{\lambda}\gamma_n(y)^{1-\lambda}.$$

Αν $x \notin A$ ή $y \notin B$ τότε το δεξιό μέλος ισούται με 0 και η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \in A$ και $y \in B$. Τότε, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\gamma_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \gamma_n(x)^{\lambda}\gamma_n(y)^{1-\lambda}.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι η $\log \gamma_n$ είναι κοίλη. Όμως,

$$\log \gamma_n(x) = -\frac{n\log(2\pi)}{2} - \frac{\|x\|_2^2}{2},$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \|x\|_2^2$ είναι κυρτή. Όμως,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \|\lambda x + (1-\lambda)y\|_2^2 \leq (\lambda\|x\|_2 + (1-\lambda)\|y\|_2)^2 \leq \lambda\|x\|_2^2 + (1-\lambda)\|y\|_2^2$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ (για την τελευταία ανισότητα, παρατηρήστε ότι η $s \mapsto s^2$ είναι κυρτή στο $(0,\infty)$).

12. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A) \leq \gamma_n(A+x) \leq \gamma_n(A).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x+A) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x+A} \exp(-\|x\|_2^2/2)\ dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{A} \exp(-\|x+z\|_2^2/2)\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{A} \exp(-\|x-z\|_2^2/2)\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{A} \frac{\exp(-\|x+z\|_2^2/2) + \exp(-\|x-z\|_2^2/2)}{2}\ dz,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η συμμετρία του A. Η $x \mapsto \exp(-x)$ είναι κυρτή, άρα

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x+A) &\geq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{A} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\|x+z\|_2^2}{2} + \frac{\|x-z\|_2^2}{2}\right)\right]\ dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{A} \exp(-\|x\|_2^2/2) \cdot \exp(-\|z\|_2^2/2)\ dz \\
&= \exp(-\|x\|_2^2/2)\ \gamma_n(A).
\end{aligned}$$

Για τη δεξιά ανισότητα, παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{2}(A+x) + \frac{1}{2}(A-x) \subseteq A,$$

οπότε η Άσκηση 12 μας δίνει

$$\gamma_n(A) \geq \sqrt{\gamma_n(A+x)}\sqrt{\gamma_n(A-x)}.$$

Όμως, $A - x = -A - x = -(A+x)$ λόγω της συμμετρίας του A και εύκολα ελέγχουμε ότι $\gamma_n(C) = \gamma_n(-C)$ για κάθε σύνολο Borel C στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$\gamma_n(A) \geq \sqrt{\gamma_n(A+x)}\sqrt{\gamma_n(-(A+x))} = \gamma_n(A+x).$$

13. *Έστω $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: (α) $g(1) = 1$, (β) $g(x+1) = xg(x)$ για κάθε $x > 0$, (γ) η $\log g$ είναι κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $g \equiv \Gamma$.*

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι από τις (α), (β) και (γ) έπεται ότι

$$(*) \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Αφού η συνάρτηση Γ ικανοποιεί τις (α)-(γ) θα πρέπει να ικανοποιεί κι αυτή την $(*)$. Συνεπώς, θα ισχύει $g(x) = \Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε πρώτα ότι $g(n+1) = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό προκύπτει με επαγωγή από τις (α) και (β).

Έστω $0 < x \leq 1$. Για κάθε $n \geq 0$ έχουμε $n+1+x = (1-x)(n+1) + x(n+2)$ (γράφουμε το $n+1+x$ σαν κυρτό συνδυασμό των $n+1$ και $n+2$). Αφού η $\log g$ είναι κοίλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
g(n+1+x) &= g((1-x)(n+1) + x(n+2)) \leq g(n+1)^{1-x} g(n+2)^x \\
&= g(n+1)^{1-x} g(n+1)^x (n+1)^x = g(n+1)(n+1)^x = n!(n+1)^x.
\end{aligned}$$

Όμοια, για κάθε $n \geq 0$ έχουμε $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$ (γράφουμε το $n+1$ σαν κυρτό συνδυασμό των $n+x$ και $n+1+x$). Αφού η $\log g$ είναι κοίλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} n! = g(n+1) &= g(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \leq g(n+x)^x g(n+1+x)^{1-x} \\ &= (n+x)^{-x} g(n+1+x)^x g(n+1+x)^{1-x} = (n+x)^{-x} g(n+1+x). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε

$$n!(n+x)^x \leq g(n+1+x) \leq n!(n+1)^x.$$

Χρησιμοποιώντας την (β) έχουμε $g(n+1+x) = x(x+1)\cdots(n+x)g(x)$. Άρα,

$$\left(\frac{n+x}{n}\right)^x \leq \frac{(x(x+1)\cdots(n+x)g(x)}{n!n^x} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^x.$$

Παίρνοντας όριο ως προς n βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(n+x)g(x)}{n!n^x} = 1,$$

δηλαδή

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(n+x)}.$$

Έστω τώρα $x > 1$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < y = x - k \leq 1$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= g(y+k) = (y+k-1)\cdots(y+1)yg(y) \\ &= y(y+1)\cdots(y+k-1)\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^y}{y(y+1)\cdots(n+y)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^y}{(y+k)\cdots(y+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{y+k}}{(y+k)(y+k+1)\cdots(y+k+n)} \frac{(n+y+1)\cdots(n+y+k)}{n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(n+x)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)\cdots(n+x-(k-1))}{n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(n+x)} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{x-j+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(n+x)}. \end{aligned}$$

14. *Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ισότητα*

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ με

$$g(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Παρατηρούμε ότι
$$g(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 1$$
διότι $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Επίσης, για κάθε $x > 0$ έχουμε
$$\begin{aligned} g(x+1) &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) \\ &= 2\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ &= 2\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$
Η συνάρτηση $\log g$ είναι ίση με
$$\log g(x) = \left[(\log 2)(x-1) - \frac{\log \pi}{2}\right] + \log\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \log\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$
Παρατηρήστε ότι καθεμιά από τις τρεις συναρτήσεις στο δεξιό μέλος είναι κυρτή (οι γραμμικές συναρτήσεις είναι κυρτές και η σύνθεση της κυρτής συνάρτησης $\log\Gamma$ με καθεμιά από τις $x/2$, $(x+1)/2$ είναι κυρτή).

Από τα παραπάνω, η g ικανοποιεί τα (α)-(γ) της Άσκησης 13, άρα $g \equiv \Gamma$. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$ ισχύει
$$\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma(x),$$
απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 2

Συνδυαστικά θεωρήματα για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο

1. *Έστω A ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη* $\mathrm{conv}(A)$ *του A είναι ανοικτό σύνολο.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{conv}(A)$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in A$ και $t_i > 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ ώστε $x = t_1a_1 + \cdots + t_ma_m$. Αφού το A είναι ανοικτό, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ μπορούμε να βρούμε $\delta_i > 0$ ώστε $B(a_i, \delta_i) \subseteq A$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} > 0$ και θα δείξουμε ότι $B(x, \delta) \subseteq \mathrm{conv}(A)$. Έστω $y \in B(x, \delta)$. Αν $u = y - x$ τότε $a_i + u \in B(a_i, \delta) \subseteq B(a_i, \delta_i) \subseteq A$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συνεπώς, $\sum_{i=1}^m t_i(a_i + u) \in \mathrm{conv}(A)$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^m t_i(a_i + u) = \sum_{i=1}^m t_ia_i + \left(\sum_{i=1}^m t_i\right) u = x + u = y.$$

Δηλαδή, $y \in \mathrm{conv}(A)$.

2. (α) *Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα S και* $\mathrm{conv}(S)$ *έχουν την ίδια διάμετρο.*

(β) *Έστω S, T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι*

$$\mathrm{conv}(S + T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T).$$

(γ) *Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι* $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$. *Ισχύει πάντα ισότητα;*

Υπόδειξη. (α) Από την $S \subseteq \mathrm{conv}(S)$ έχουμε $\mathrm{diam}(S) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{conv}(S))$. Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τυχόντα $x, y \in \mathrm{conv}(S)$. Υπάρχουν $u_i, v_j \in S$ και $t_i, s_j > 0$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq$

$j \leq k$) με $\sum_{i=1}^m t_i = \sum_{j=1}^k s_j = 1$, ώστε $x = \sum_{i=1}^m t_i u_i$ και $\sum_{j=1}^k s_j v_j$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|x-y\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^m t_i u_i - \sum_{j=1}^k s_j v_j \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^m t_i \left(\sum_{j=1}^k s_j \right) u_i - \sum_{j=1}^k s_j \left(\sum_{i=1}^m t_i \right) v_j \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j u_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j v_j \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j (u_i - v_j) \right\|_2 \\
&\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j \|u_i - v_j\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j \right) \mathrm{diam}(S) \\
&= \mathrm{diam}(S),
\end{aligned}$$

αφού $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j = \left(\sum_{i=1}^m t_i\right) \left(\sum_{j=1}^k s_j\right) = 1$ και $\|u_i - v_j\|_2 \leq \mathrm{diam}(S)$ για κάθε i, j. Αφού τα $x, y \in \mathrm{conv}(S)$ ήταν τυχόντα, $\mathrm{diam}(\mathrm{conv}(S)) \leq \mathrm{diam}(S)$.

(β) Έστω $x \in \mathrm{conv}(S+T)$. Υπάρχουν $y_i \in S+T$ και $t_i > 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ ώστε $x = \sum_{i=1}^m t_i y_i$. Κάθε y_i γράφεται σαν άθροισμα $y_i = u_i + v_i$ για κάποια $u_i \in S$ και $v_i \in T$. Τότε,

$$x = \sum_{i=1}^m t_i (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^m t_i u_i + \sum_{i=1}^m t_i v_i \in \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T).$$

Συνεπώς, $\mathrm{conv}(S+T) \subseteq \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T)$.

Αντίστροφα, έστω $y \in \mathrm{conv}(S)$ και $z \in \mathrm{conv}(T)$. Γράφουμε $y = \sum_{i=1}^m t_i u_i$ και $z = \sum_{j=1}^k s_j v_j$, όπου $u_i \in S$, $v_j \in T$, $t_i, s_j > 0$ και $\sum_{i=1}^m t_i = \sum_{j=1}^k s_j = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
y + z &= \sum_{i=1}^m t_i u_i + \sum_{j=1}^k s_j v_j = \sum_{i=1}^m t_i \left(\sum_{j=1}^k s_j \right) u_i + \sum_{j=1}^k s_j \left(\sum_{i=1}^m t_i \right) v_j \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j u_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j v_j \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j (u_i + v_j) \in \mathrm{conv}(S+T),
\end{aligned}$$

αφού $u_i + v_j \in S + T$ και $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k t_i s_j = \left(\sum_{i=1}^m t_i\right) \left(\sum_{j=1}^k s_j\right) = 1$. Αφού τα $y \in \mathrm{conv}(S)$ και $z \in \mathrm{conv}(T)$ ήταν τυχόντα, $\mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T) \subseteq \mathrm{conv}(S+T)$.

(γ) Από την $\mathrm{int}(S) \subseteq S$ έπεται ότι $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{conv}(S)$. Από το (α) έχουμε ότι το σύνολο $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S))$ είναι ανοικτό, άρα περιέχεται στο εσωτερικό του $\mathrm{conv}(S)$. Δηλαδή, $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$.

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος: για παράδειγμα, αν $S = \{0, 1\}$ στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathrm{int}(S) = \emptyset$ και $\mathrm{conv}(S) = [0, 1]$, συνεπώς $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(S)) = \emptyset$ και $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(S)) = (0, 1)$.

3. *Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο σημεία που* ***δεν*** *ανήκουν στην κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S. Δείξτε ότι αν $x \in \mathrm{conv}(S \cup \{y\})$ και $y \in \mathrm{conv}(S \cup \{x\})$ τότε $x = y$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \neq y$. Αφού $x \in \mathrm{conv}(S \cup \{y\})$, υπάρχουν $u_i \in S$ και $t_i, t \geq 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i + t = 1$ ώστε

$$x = \sum_{i=1}^m t_i u_i + ty.$$

Παρατηρούμε ότι $t \neq 0$ (αλλιώς θα είχαμε $x \in \mathrm{conv}(S)$) και $t \neq 1$ (αλλιώς θα είχαμε $t_1 = \cdots = t_m = 0$ και $x = y$). Όμοια, αφού $y \in \mathrm{conv}(S \cup \{x\})$ και $x \neq y$, υπάρχουν $v_j \in S$ και $s_j \geq 0$, $0 < s < 1$ με $\sum_{j=1}^k s_j + s = 1$, ώστε

$$y = \sum_{j=1}^k s_j v_j + sx.$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη στη δεύτερη σχέση παίρνουμε

$$y = \sum_{j=1}^k s_j v_j + \sum_{i=1}^m s t_i u_i + tsy,$$

δηλαδή

$$y = \sum_{j=1}^k \frac{s_j}{1-ts} v_j + \sum_{i=1}^m s \frac{t_i}{1-ts} u_i.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{j=1}^k \frac{s_j}{1-ts} + \sum_{i=1}^m s \frac{t_i}{1-ts} = \frac{1-s}{1-ts} + s\frac{1-t}{1-ts} = \frac{1-s+s(1-t)}{1-ts} = 1.$$

Έπεται ότι $y \in \mathrm{conv}(S)$, το οποίο είναι άτοπο.

4. *Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \ldots, I_m$ στον $\mathbb{R}^2$ τα οποία περιέχονται στις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $\ell_1, \ldots, \ell_m$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει ευθεία που τέμνει τα I_{i_1}, I_{i_2} και I_{i_3}. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που τέμνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα $I_1, \ldots, I_m$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $I_1, \ldots, I_m$ είναι παράλληλα στον y-άξονα. Αφού περιέχονται σε διακεκριμένες ευθείες, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m$ διαφορετικά ανά δύο και $c_i < d_i$, $i = 1, \ldots, m$ στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$I_i = \{(x_i, y) : c_i \leq y \leq d_i\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ορίζουμε $C_1, \ldots, C_m \subseteq \mathbb{R}^2$ θέτοντας

$$C_i = \{(a, b) : c_i \leq a x_i + b \leq d_i\}.$$

Δηλαδή, $(a, b) \in C_i$ αν και μόνο αν η ευθεία $y = ax + b$ τέμνει το I_i. Από την υπόθεση, για κάθε $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, m\}$ ισχύει $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3} \neq \emptyset$. Επιπλέον, κάθε C_i είναι κυρτό σύνολο: αν $(a, b) \in C_i$ και $(a_1, b_1) \in C_i$ τότε $c_i \leq a x_i + b \leq d_i$ και $c_i \leq a_1 x_i + b_1 \leq d_i$ οπότε, για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει

$$c_i = (1-t)c_i + tc_i \leq (1-t)(ax_i + b) + t(a_1 x_i + b_1) \leq (1-t)d_i + td_i = d_i,$$

δηλαδή $((1-t)a+ta_1,(1-t)b+tb_1)\in C_i$. Τώρα, το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα του Helly στον $\mathbb{R}^2$: υπάρχουν a,b ώστε $(a,b)\in C_1\cap\cdots\cap C_m$, το οποίο σημαίνει ότι η ευθεία $y=ax+b$ τέμνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα I_i.

5. *Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1,\ldots,A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i,j\in\{1,\ldots,m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει τα A_i και A_j. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x–άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1,\ldots,A_m$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $i=1,\ldots,m$ ορίζουμε $B_i=\{t\in\mathbb{R}:\ \text{υπάρχει } x\in\mathbb{R} \text{ ώστε } (x,t)\in A_i\}$, δηλαδή B_i είναι η «προβολή» του A_i στον y-άξονα. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε B_i είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από την υπόθεση, για κάθε $i,j\in\{1,\ldots,m\}$ υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y=t$ να τέμνει τα A_i και A_j. Δηλαδή, υπάρχουν $x_i,x_j\in\mathbb{R}$ ώστε $(x_i,t)\in A_i$ και $(x_j,t)\in A_j$. Αυτό σημαίνει ότι $t\in B_i\cap B_j$, άρα $B_i\cap B_j\neq\emptyset$.

Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly για τα κυρτά σύνολα $B_1,\ldots,B_m\subseteq\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $t\in B_1\cap\cdots\cap B_m$. Τότε, η ευθεία $y=t$ τέμνει όλα τα σύνολα $A_1,\ldots,A_m$.

6. *Έστω $m\geq n+1$, $d>0$ και $C_1,\ldots,C_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: αν $1\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq m$ τότε υπάρχει $y\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(y,C_{i_j})\leq d$ για κάθε $j=1,\ldots,n+1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(x,C_i)\leq d$ για κάθε $i=1,\ldots,m$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $i\in\{1,\ldots,m\}$ ορίζουμε

$$B_i=\{y\in\mathbb{R}^n: d(y,C_i)\leq d\}.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε B_i είναι κυρτό: έστω $y_1,y_2\in B_i$, $t\in(0,1)$ και $\varepsilon>0$. Υπάρχουν $x_1,x_2\in C_i$ ώστε $\|y_1-x_1\|_2<d+\varepsilon$ και $\|y_2-x_2\|<d+\varepsilon$. Αφού το C_i είναι κυρτό, έχουμε $(1-t)x_1+tx_2\in C_i$ και

$$\begin{aligned}\|((1-t)y_1+ty_2)-((1-t)x_1+tx_2)\|_2 &= \|(1-t)(y_1-x_1)+t(y_2-x_2)\|_2\\ &\leq (1-t)\|y_1-x_1\|_2+t\|y_2-x_2\|_2<d+\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα, $d((1-t)y_1+ty_2,C_i)<d+\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε $d((1-t)y_1+ty_2,C_i)\leq d$, δηλαδή $(1-t)y_1+ty_2\in B_i$.

Από την υπόθεση, αν $1\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq m$ υπάρχει $y\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(y,C_{i_j})\leq d$ για κάθε $j=1,\ldots,n+1$, δηλαδή $y\in B_{i_1}\cap\cdots\cap B_{i_{n+1}}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly για τα B_i, βρίσκουμε $x\in B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_m$. Τότε, $d(x,C_i)\leq d$ για κάθε $i=1,\ldots,m$.

7. *Δίνονται $\theta_1,\ldots,\theta_k\in S^{n-1}$ και $t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο*

$$P=\bigcap_{i=1}^k\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta_i\rangle\leq t_i\}$$

είναι μη κενό και φραγμένο. Δείξτε ότι: αν το υπερεπίπεδο $H=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta\rangle=t\}$ (όπου $\theta\in S^{n-1}$ και $t\in\mathbb{R}$) ικανοποιεί την $P\cap H=\emptyset$, τότε υπάρχουν $1\leq i_1<\cdots<i_n\leq k$ ώστε το $P_1=\bigcap_{j=1}^n\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta_{i_j}\rangle\leq t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P_1\supseteq P$ και $P_1\cap H=\emptyset$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $C_0=H$ και $C_i=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta_i\rangle\leq t_i\}$, $i=1,\ldots,k$. Τα σύνολα $C_0,C_1,\ldots,C_k$ είναι κυρτά και από την υπόθεση έχουμε $C_0\cap C_1\cap\cdots\cap C_k=\emptyset$. Από το θεώρημα του Helly υπάρχουν $0 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_n \le k$ ώστε $C_{i_0} \cap C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_{n+1}} = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $i_0 = 0$: διαφορετικά,

$$C_{i_0} \cap \cdots \cap C_{i_{n+1}} \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} C_i = P \neq \emptyset.$$

Θέτουμε

$$P_1 = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_{i_j} \rangle \le t_{i_j}\}.$$

Τότε, $P_1 \supseteq P$ και

$$H \cap P_1 = C_0 \cap C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_n} = \emptyset.$$

8. *Έστω $A_1, \ldots, A_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $k \le n+1$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$, το σύνολο $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ είναι μη κενό.*

Δείξτε ότι: αν F είναι ένας $(n-k+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε η μεταφορά $F+u$ του F να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \ldots, A_m$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον κάθετο υπόχωρο $F^{\perp}$ του F. Παρατηρήστε ότι $\dim(F^{\perp}) = k-1$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ ορίζουμε

$$C_i = \{x \in F^{\perp} : \text{ υπάρχει } y \in F \text{ ώστε } x + y \in A_i\}.$$

Δηλαδή, C_i είναι η «προβολή» του A_i στον $F^{\perp}$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα των A_i ελέγχουμε εύκολα ότι κάθε C_i είναι κυρτό υποσύνολο του $F^{\perp}$.

Από την υπόθεση, για κάθε $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ μπορούμε να βρούμε $z \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Γράφοντας $z = x + y$ όπου $x \in F^{\perp}$ και $y \in F$, βλέπουμε ότι $x \in B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}$.

Αφού $\dim(F^{\perp}) = k-1$, τα $B_1, \ldots, B_m$ ικανοποιούν την υπόθεση του θεωρήματος του Helly στον $F^{\perp}$. Συνεπώς, $B_1 \cap \cdots \cap B_m \neq \emptyset$. Θεωρούμε $u \in F^{\perp}$ με $u \in B_1 \cap \cdots \cap B_m$. Από τον ορισμό των B_i, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ υπάρχει $y_i \in F$ ώστε $u + y_i \in A_i$. Δηλαδή,

$$(u + F) \cap A_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m.$$

9. *Έστω $A_1, \ldots, A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Δείξτε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, m$, το σύνολο $B_i = \{u \in \mathbb{R}^n : A_i \cap (C + u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό.*

(β) *Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C+u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \ldots, A_m$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $B_i = A_i - C = \{x - y : x \in A_i, y \in C\}$. Αφού τα A_i, C είναι κυρτά, ελέγχουμε εύκολα ότι το $A_i - C$ είναι κυρτό.

(β) Με βάση το (α) η υπόθεση μεταφράζεται ως εξής: για κάθε $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$u \in (A_{i_1} - C) \cap \cdots \cap (A_{i_{n+1}} - C) = B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_{n+1}}.$$

Από το θεώρημα του Helly για τα B_i, υπάρχει

$$u \in B_1 \cap \cdots \cap B_m = (A_1 - C) \cap \cdots \cap (A_m - C).$$

Τότε, $(C+u)\cap A_i\neq\emptyset$ για κάθε $i=1,\dots,m$.

10. *Έστω $m\geq n+1$ και $K,C_1,\dots,C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq m$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $x+K\subseteq C_{i_1}\cap\cdots\cap C_{i_{n+1}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $x+K\subseteq C_1\cap\cdots\cap C_m$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $i=1,\dots,m$ ορίζουμε $A_i=\{x\in\mathbb{R}^n : x+K\subseteq C_i\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε A_i είναι κυρτό: έστω $x,y\in A_i$ και $t\in(0,1)$. Για κάθε $u\in K$ έχουμε

$$(1-t)x+ty+u=(1-t)(x+u)+t(y+u)\in C_i$$

γιατί $x+u,y+u\in C_i$ και το C_i είναι κυρτό. Συνεπώς, $(1-t)x+ty+K\subseteq C_i$, δηλαδή $(1-t)x+ty\in A_i$.

Από την υπόθεση έχουμε $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n+1}}\neq\emptyset$ για κάθε $1\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq m$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Helly παίρνουμε $A_1\cap\cdots\cap A_m\neq\emptyset$. Τότε, για τυχόν $x\in A_1\cap\cdots\cap A_m$ έχουμε $x+K\subseteq C_i$ για κάθε $i=1,\dots,m$, δηλαδή $x+K\subseteq C_1\cap\cdots\cap C_m$.

11*. *Δίνονται n σημεία $x_1,\dots,x_n$ στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχει ζεύγος κάθετων ευθειών $\ell_1\perp\ell_2$ ώστε καθένα από τα τέσσερα κλειστά τεταρτημόρια στα οποία χωρίζουν το επίπεδο να περιέχει τουλάχιστον $[n/4]$ από τα σημεία x_i.*

12. *Έστω $T(n,r)$ ο μικρότερος φυσικός m με την ακόλουθή ιδιότητα: αν $A\subset\mathbb{R}^n$ και $|A|=m$, τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1,\dots,A_r\subset A$ ώστε*

$$\bigcap_{i=1}^{r}\mathrm{conv}(A_i)\neq\emptyset.$$

Δείξτε ότι

$$T(n,r_1r_2)\leq T(n,r_1)T(n,r_2)$$

για κάθε $r_1,r_2\geq 2$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $m=T(n,r_1)$ και $k=T(n,r_2)$. Θεωρούμε $A\subseteq\mathbb{R}^n$ με $|A|=mk$ και το χωρίζουμε σε k ξένα σύνολα $A_1,\dots,A_k$, καθένα από τα οποία έχει $m=T(n,r_1)$ στοιχεία.

Για κάθε $i=1,\dots,k$ μπορούμε να βρούμε ξένα σύνολα $A_{i1},\dots,A_{ir_1}\subseteq A_i$ και $y_i\in\mathbb{R}^n$ με

$$y_i\in\bigcap_{j=1}^{r_1}\mathrm{conv}(A_{ij}).$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι τα $y_1,\dots,y_k$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Θεωρούμε το σύνολο $B=\{y_1,\dots,y_k\}$. Αφού $|B|=k=T(n,r_2)$, μπορούμε να βρούμε ξένα σύνολα $J_1,\dots,J_{r_2}\subseteq\{1,\dots,k\}$ και $z\in\mathbb{R}^n$ ώστε

$$z\in\bigcap_{s=1}^{r_2}\mathrm{conv}(\{y_i : i\in J_s\}).$$

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\left\{\bigcup_{i\in J_s}A_{ij} : 1\leq s\leq r_2, 1\leq j\leq r_1\right\}.$$

Αποτελείται από ξένα υποσύνολα του A, έχει πληθάριθμο r_1r_2 και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$z \in \bigcap_{s=1}^{r_2} \bigcap_{j=1}^{r_1} \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i \in J_s} A_{ij} \right).$$

Σημείωση: Στην περίπτωση που κάποια από τα y_i συμπίπτουν, θεωρήστε ακολουθίες $y_i^n = y_i + u_{i,n} \to y_i$ ώστε για κάθε n τα y_i^n να είναι διαφορετικά ανά δύο, και αντικαταστήστε τα A_{ij} με τα $A_{ij}^{(n)} = A_{ij} + u_{i,n}$. Ακολουθώντας την ίδια πορεία μπορείτε να βρείτε

$$z_n \in \bigcap_{s=1}^{r_2} \bigcap_{j=1}^{r_1} \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i \in J_s} A_{ij}^{(n)} \right).$$

Η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και το όριό της ικανοποιεί το ζητούμενο.

13. *Σκοπός μας σε αυτή την άσκηση είναι να δείξουμε το εξής: αν K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(α) *Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ με $u_1 + \cdots + u_{n+1} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις δείξτε ότι*

$$-\frac{1}{n}K \subseteq K.$$

(β) *Εξετάστε τώρα την περίπτωση που $K = \mathrm{conv}(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$ για κάποια $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Αν*

$$y = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n},$$

δείξτε ότι

$$-\frac{1}{n}K + y \subseteq K.$$

(γ) *Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση: K είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in K$ θεωρήστε το σύνολο*

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n}x + y \in K \right\}$$

και δείξτε ότι η οικογένεια $\{A_x : x \in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in -\frac{1}{n}K$. Υπάρχει $z \in K$ ώστε $x = -\frac{1}{n}z$. Το z είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_{n+1}$: υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ ώστε

$$x = -\frac{1}{n}z = -\frac{t_1u_1 + \cdots + t_{n+1}u_{n+1}}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας την $u_1 + \cdots + u_{n+1} = 0$ γράφουμε

$$x = \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n} - \frac{t_1u_1 + \cdots + t_{n+1}u_{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1 - t_i}{n} u_i.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_i}{n}=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}=1$$

και $\frac{1-t_i}{n}\geq 0$ για κάθε $i=1,\dots,n+1$. Συνεπώς, το x είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1,\dots,u_{n+1}$: δηλαδή, $x\in K$.

(β) Θεωρούμε τυχόν $x\in -\frac{1}{n}K+y$. Υπάρχει $z\in K$ ώστε $x=-\frac{1}{n}z+y$. Το z είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1,\dots,u_{n+1}$: υπάρχουν $t_i\geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1}t_i=1$ ώστε

$$x=-\frac{1}{n}z=-\frac{t_1u_1+\cdots+t_{n+1}u_{n+1}}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας την $u_1+\cdots+u_{n+1}=ny$ γράφουμε

$$x=\frac{u_1+\cdots+u_{n+1}}{n}-\frac{t_1u_1+\cdots+t_{n+1}u_{n+1}}{n}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_i}{n}u_i.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1-t_i}{n}=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}=1$$

και $\frac{1-t_i}{n}\geq 0$ για κάθε $i=1,\dots,n+1$. Συνεπώς, το x είναι κυρτός συνδυασμός των $u_1,\dots,u_{n+1}$: δηλαδή, $x\in K$.

(γ) Για κάθε $x\in K$ θεωρήστε το σύνολο

$$A_x=\left\{y\in\mathbb{R}^n:-\frac{1}{n}x+y\in K\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A_x=K+\frac{1}{n}x$, άρα κάθε A_x είναι κυρτό και συμπαγές.

Έστω $x_1,\dots,x_{n+1}\in K$. Αν $T=\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_{n+1}\})$, εφαρμόζοντας το (β) βλέπουμε ότι

$$-\frac{1}{n}T+y\subseteq T\subseteq K$$

όπου $y=\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n}$. Δηλαδή, $-\frac{1}{n}x_i+y\in K$ για κάθε $i=1,\dots,n+1$. Έπεται ότι

$$y\in A_{x_1}\cap\cdots\cap A_{x_{n+1}},$$

δηλαδή η οικογένεια $\{A_x:x\in K\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Helly. Αφού τα A_x είναι συμπαγή, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει

$$z\in\bigcap_{x\in K}A_x.$$

Αυτό σημαίνει ότι $-\frac{1}{n}x+z\subseteq K$ για κάθε $x\in K$, άρα

$$-\frac{1}{n}K+z\subseteq K.$$

14*. *Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η διάμετρος του K ορίζεται από την*

$$\mathrm{diam}(K) = \max\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}(K) \leq 2$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα του Jung.

15*. *Δίνονται μη κενές οικογένειες $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n+1}$ συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε επιλογή $C_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$ ισχύει $C_1 \cap \cdots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε όλα τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{C}_i$ να έχουν κάποιο κοινό σημείο.*

16* *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S έχει μη κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι: αν $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(S))$ τότε υπάρχουν $v_1, \ldots, v_{2n} \in S$ ώστε $x \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\{v_1, \ldots, v_{2n}\}))$.*

Κεφάλαιο 3

Γεωμετρία των αριθμών

1. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$. Συμβολίζουμε με N_r τον πληθάριθμο του συνόλου $K \cap \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|K|}{N_r r^{-n}} = 1.$$

Υπόδειξη. Το K έχει μη κενό εσωτερικό, και αν το r είναι αρκετά μεγάλο υπάρχει $z \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$ ώστε $z \in \mathrm{int}(K)$. Μεταφέροντας το K μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z = 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\delta B_2^n \subseteq K$. Ορίζουμε $A_r = \left\{x \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n : x + \frac{1}{r}P \subseteq K\right\}$ και $B_r = \{x \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n : (x + \frac{1}{r}P) \cap K \neq \emptyset\}$, όπου

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Θέτουμε $C_r = \bigcup_{x\in A_r}(x + \frac{1}{r}P)$ και $D_r = \bigcup_{x\in B_r}(x + \frac{1}{r}P)$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{\mathrm{card}(A_r)}{r^n} = |C_r| \leq |K| \leq |D_r| = \frac{\mathrm{card}(B_r)}{r^n}.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|D_r|}{|K|} = 1. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι

$$D_r \subseteq K + \frac{1}{r}P \subseteq K + (\sqrt{n}/r)B_2^n \subseteq K + \frac{\sqrt{n}}{\delta r}K.$$

Έπεται ότι

$$\frac{|D_r|}{|K|} \leq \frac{\left|\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\delta r}\right)K\right|}{|K|} = \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\delta r}\right)^n \to 1$$

όταν το $r \to \infty$. Αφού $|D_r|/|K| \geq 1$, έχουμε δείξει την (1).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|C_r|}{|K|}=1. \tag{2}$$

Θέτουμε $\alpha=\frac{\sqrt{n}}{\delta r}$. Αν το r είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε $0<\alpha<1$. Έστω $x\in(1-\alpha)K$. Υπάρχει $y\in\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n$ ώστε $x\in y+\frac{1}{r}P$. Για κάθε $z\in y+\frac{1}{r}P$ έχουμε

$$z-x=(z-y)+(y-x)\in\frac{1}{r}(P-P)\subseteq\frac{\sqrt{n}}{r}B_2^n\subseteq\alpha K.$$

Συνεπώς, $z=x+(z-x)\in(1-\alpha)K+\alpha K=K$. Δηλαδή, $y+\frac{1}{r}P\subseteq K$, άρα $y\in A_r$. Έπεται ότι $x\in C_r$, δηλαδή $(1-\alpha)K\subseteq C_r$. Τότε,

$$\frac{|C_r|}{|K|}\geq\frac{\left|\left(1-\frac{\sqrt{n}}{\delta r}\right)K\right|}{|K|}=\left(1-\frac{\sqrt{n}}{\delta r}\right)^n\to 1$$

όταν το $r\to\infty$. Αφού $|C_r|/|K|\leq 1$, έχουμε δείξει την (2).

Τέλος, παρατηρούμε ότι $\mathrm{card}(A_r)\leq N_r\leq\mathrm{card}(B_r)$, συνεπώς

$$|C_r|\leq N_r r^{-n}\leq|D_r|.$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με τις (1) και (2) παίρνουμε την

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|K|}{N_r r^{-n}}=1.$$

2. (Mordell) *Έστω $m\in\mathbb{N}$ και έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K|>m$. Τότε, υπάρχει $z\in\mathbb{R}^n$ ώστε το $K+z$ να περιέχει τουλάχιστον $m+1$ διακεκριμένα ακέραια σημεία.*

Υπόδειξη. Για κάθε $r\in\mathbb{N}$, θεωρούμε το πλέγμα $(1/r)\mathbb{Z}^n$. Συμβολίζουμε με N_r τον πληθάριθμο του συνόλου $K\cap(1/r)\mathbb{Z}^n$. Από την άσκηση 1 έχουμε

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|K|}{N_r(1/r)^n}=1,$$

δηλαδή, για μεγάλα r ισχύει η ανισότητα

$$N_r>r^n m.$$

Παίρνουμε ένα τέτοιο $r\in\mathbb{N}$, και θεωρούμε το σύνολο

$$A_r=\{u\in\mathbb{Z}^n:(1/r)u\in K\}.$$

Το A_r έχει πληθάριθμο $N_r>r^n m$, και τα σημεία του ανήκουν σε r^n το πολύ κλάσεις υπολοίπων $\mathrm{mod} r$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε $u_1,\dots,u_{m+1}\in A_r$ τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση $\mathrm{mod} r$. Τότε, τα σημεία $\frac{u_1}{r},\dots,\frac{u_{m+1}}{r}$ ανήκουν στο K, και τα

$$x_i=\frac{u_i-u_1}{r}\in\mathbb{Z}^n,\quad i=1,\dots,m+1.$$

Άρα, αν θέσουμε $z = (1/r)u_1$, το $K + z$ περιέχει $m + 1$ ακέραια σημεία.

3. (van der Corput) *Έστω $m \in \mathbb{N}$, και K ένα ανοικτό και φραγμένο, συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με όγκο $|K| > 2^n m$. Τότε, το K περιέχει τουλάχιστον m ζευγάρια ακεραίων σημείων $\pm u_j \neq 0$.*

Υπόδειξη. Το $K/2$ έχει όγκο μεγαλύτερο από m. Από το Λήμμα του Mordell, υπάρχουν $z \in \mathbb{R}^n$ και $v_1, \ldots, v_{m+1}$ διακεκριμένα ακέραια σημεία ώστε

$$z + v_i \in \frac{1}{2}K, \quad i = 1, \ldots, m+1.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα v_i είναι διατεταγμένα λεξικογραφικά. Δηλαδή, αν $i < i'$ τότε $(v_i)_s < (v_{i'})_s$, όπου s είναι ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $(v_i)_s \neq (v_{i'})_s$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$u_i := v_{i+1} - v_1 = (z + v_{i+1}) - (z + v_1) \in \left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K\right) \cap (\mathbb{Z}^n \backslash \{0\}) = K \cap (\mathbb{Z}^n \backslash \{0\}),$$

και, τα ζευγάρια $\pm u_i$, $i = 1, \ldots, m$, είναι διακεκριμένα, γιατί κάθε u_i έχει θετική την πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του (οπότε, δεν μπορεί να συμβεί $u_i = -u_j$ αν $i \neq j$).

4. (Mahler) *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Ο συντελεστής ασυμμετρίας του K ως προς το 0 είναι ο μικρότερος $\sigma = \sigma(K) > 0$ για τον οποίο*

$$x \in K \Longrightarrow -x \in \sigma K.$$

Δείξτε ότι: αν $|K| > (1 + \sigma(K))^n$, τότε $K \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σώμα $K_1 = (1 + \sigma)^{-1}K$. Τότε, $|K_1| > 1$, άρα υπάρχουν $x, y \in K_1$ ώστε $y - x \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$. Τα K και K_1 είναι ομοιοθετικά, άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή ασυμμετρίας, και αφού $x \in K_1$ συμπεραίνουμε ότι $-\sigma^{-1}x \in K_1$. Τότε, χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του K_1, βλέπουμε ότι

$$y - x = (1 + \sigma)\left(\frac{1}{1+\sigma}y + \frac{\sigma}{1+\sigma}(-\sigma^{-1}x)\right) \in (1 + \sigma)K_1 = K.$$

Δηλαδή, $y - x \in K \cap (\mathbb{Z}^n \backslash \{0\})$.

5. *Αποδείξτε λεπτομερώς το Θεώρημα 3.2.3: Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα: αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, υπάρχουν $q \in \mathbb{N}$ οσοδήποτε μεγάλος, και $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Υπόδειξη. Έστω $M > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι όλοι ρητοί. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$K = \left\{(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |a_i x - y_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}}, |x| \leq Q\right\},$$

όπου $Q > 1$ αρκετά μεγάλος ώστε

$$t_M := \min\Big\{\max_{i\leq n}|a_i q - p_i| : q \leq M, q \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{Z}\Big\} > \frac{1}{Q^{1/n}}.$$

Ο όγκος του K είναι ίσος με $(2Q)\prod_{i=1}^n 2Q^{-1/n} = 2^{n+1}$. Από το θεώρημα του Minkowski στον $\mathbb{R}^{n+1}$ υπάρχουν ακέραιοι $q, p_1, \dots, p_n$, όχι όλοι μηδέν, ώστε $|q| \leq Q$ και $|a_i q - p_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε ότι $q \neq 0$: αλλιώς, για κάθε $i = 1, \dots, n$ θα είχαμε $|p_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}} < 1$, δηλαδή $q = p_1 = \dots = p_n = 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $q > 0$. Τότε, ο q είναι φυσικός και για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ^{1/n}} \leq \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}},$$

αφού $q \leq Q$. Τέλος, $q > M$ διότι $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i q - p_i| \leq \frac{1}{Q^{1/n}} < t_M$.

6. *Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *Για κάθε ελλειψοειδές E με όγκο $|E| > \frac{n+2}{2}2^{n/2}$ ισχύει $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.*

(ii) *Για κάθε πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ στον $\mathbb{R}^n$ (όπου $T \in GL(n)$) με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2}2^{n/2}|\det T|$ ισχύει $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. Από το (i) στο (ii): Έστω $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ πλέγμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|B_2^n| > \frac{n+2}{2}2^{n/2}|\det T|$. Τότε, για το ελλειψοειδές $E = T^{-1}(B_2^n)$ έχουμε $|E| = |\det T|^{-1}|B_2^n| > \frac{n+2}{2}2^{n/2}$, άρα $E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Έπεται ότι

$$B_2^n \cap (T(\mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}) = T(E) \cap (T(\mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}) = T(E \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, $B_2^n \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

7* (Pick) *Έστω K κυρτό πολύγωνο με κορυφές σημεία του $\mathbb{Z}^2$. Δείξτε ότι το πλήθος των σημείων του $K \cap \mathbb{Z}^2$ είναι ίσο με*

$$A(K) + \frac{|\mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{bd}(K)|}{2} + 1,$$

όπου $A(K)$ το εμβαδόν του K και $\mathrm{bd}(K)$ το σύνορο του K.

*Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα πλέγμα $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, όπου $T \in GL(n)$, λέγεται **αποδεκτό** για το K, αν το μόνο σημείο του Λ που ανήκει στο εσωτερικό του K είναι το 0.*

*Αν $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ όπου $T \in GL(n)$, ορίζουμε $\det\Lambda = |\det T|$. Η **κρίσιμη ορίζουσα** $\Delta(K)$ του K είναι το $\inf(\det\Lambda)$, όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα πλέγματα Λ που είναι αποδεκτά για το K.*

8. *Δείξτε ότι:*

(i) *Αν $K \subseteq W$, τότε $\Delta(K) \leq \Delta(W)$.*

(ii) *Για κάθε $t > 0$, $\Delta(tK) = t^n\Delta(K)$.*

(iii) *Αν* $T \in GL(n)$, *τότε* $\Delta(T(K)) = |\det T|\Delta(K)$.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι αν ένα πλέγμα Λ είναι αποδεκτό για το W τότε είναι αποδεκτό και για το K, αφού $\Lambda \cap \mathrm{int}(K) \subseteq \Lambda \cap \mathrm{int}(W) = \{0\}$. Αφού

$$\{\Lambda : \Lambda \cap \mathrm{int}(W) = \{0\}\} \subseteq \{\Lambda : \Lambda \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}\},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta(K) = \inf\{\det \Lambda : \Lambda \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}\} \leq \inf\{\det \Lambda : \Lambda \cap \mathrm{int}(W) = \{0\}\} = \Delta(W).$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(tK) = \{0\}$ αν και μόνο αν $\left(\frac{1}{t}T\right)(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= \inf\left\{\left|\det\left(\frac{1}{t}T\right)\right| : T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(tK) = \{0\}\right\} \\ &= \frac{1}{t^n}\inf\{|\det T| : T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(tK) = \{0\}\} = \frac{1}{t^n}\Delta(tK). \end{aligned}$$

(iii) Παρατηρούμε ότι $S(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(T(K)) = \{0\}$ αν και μόνο αν $\left(T^{-1}S\right)(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= \inf\left\{\left|\det(T^{-1}S)\right| : S(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(T(K)) = \{0\}\right\} \\ &= |\det T^{-1}| \inf\{|\det S| : S(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(T(K)) = \{0\}\} = \frac{1}{|\det T|}\Delta(T(K)). \end{aligned}$$

9. *Δείξτε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\Delta(K) \geq 2^{-n}|K|.$$

Υπόδειξη. Έστω $T \in GL(n)$ με την ιδιότητα $T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}$. Τότε, $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{int}(T^{-1}(K)) = \{0\}$. Από το θεώρημα του Minkowski,

$$|T^{-1}(K)| \leq 2^n,$$

δηλαδή $\frac{1}{|\det T|}|K| \leq 2^n$ ή, ισοδύναμα, $|\det T| \geq 2^{-n}|K|$. Έπεται ότι

$$\Delta(K) = \inf\{|\det T| : T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(K) = \{0\}\} \geq 2^{-n}|K|.$$

10. *Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_n$ την κλάση όλων των ελλειψοειδών του $\mathbb{R}^n$ που δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κανένα σημείο του $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ και ορίζουμε*

$$\alpha_n = \sup\{|E| : E \in \mathcal{E}_n\}.$$

Δείξτε ότι

$$\Delta(B_2^n)\alpha_n = \omega_n.$$

Υπόδειξη. Έστω $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$ ένα πλέγμα με την ιδιότητα $\Lambda \cap \mathrm{int}(B_2^n) = \{0\}$. Τότε, για το ελλειψοειδές $E = T^{-1}(B_2^n)$ έχουμε $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{int}(E) = \{0\}$, άρα $|E| \leq \alpha_n$. Δηλαδή, $|\det T^{-1}||B_2^n| \leq \alpha_n$. Ισοδύναμα,

$$|\det T|\alpha_n \geq \omega_n.$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλα τα πλέγματα που είναι αποδεκτά για την B_2^n βλέπουμε ότι

$$\Delta(B_2^n)\alpha_n \geq \omega_n.$$

Αντίστροφα, αν $E = T^{-1}(B_2^n)$ είναι ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{int}(E) = \{0\}$, τότε

$$T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(B_2^n) = T(\mathbb{Z}^n) \cap \mathrm{int}(T(E)) = T(\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{int}(E)) = \{0\},$$

άρα $|\det T| \geq \Delta(B_2^n)$. Έπεται ότι

$$|E| = \frac{1}{|\det T|}|B_2^n| \leq \frac{\omega_n}{\Delta(B_2^n)}.$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα $E \in \mathcal{E}_n$ συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_n \leq \frac{\omega_n}{\Delta(B_2^n)}.$$

*Μια οικογένεια $P = \{x_i + rB_2^n : i \in I\}$ από μπάλες ακτίνας $r > 0$, λέγεται **packing** αν οι $x_i + rB_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά. Ορίζουμε άνω και κάτω **πυκνότητα** του P ως εξής: για κάθε $R > 0$, θεωρούμε την RB_2^n, και τις $x_i + rB_2^n$ οι οποίες τέμνουν την RB_2^n. Αν $N(R)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του $\{i \in I : (x_i + rB_2^n) \cap (RB_2^n) \neq \emptyset\}$, ορίζουμε*

$$\overline{\delta}(P) = \limsup_{R\to\infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}$$

και

$$\underline{\delta}(P) = \liminf_{R\to\infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n}.$$

Οι αριθμοί $\overline{\delta}(P)$ και $\underline{\delta}(P)$ είναι η άνω και κάτω πυκνότητα του P, αντίστοιχα. Αν $\overline{\delta}(P) = \underline{\delta}(P)$, τότε αυτή η κοινή τιμή είναι η πυκνότητα $\delta(P)$ του P.

*Έστω Λ ένα πλέγμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα **packing με κέντρα στο** Λ είναι ένα packing της μορφής*

$$P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}.$$

11. *Έστω $P = \{x + rB_2^n : x \in \Lambda\}$ ένα packing με κέντρα στο πλέγμα Λ. Δείξτε ότι*

$$\delta(P) = \frac{\omega_n r^n}{\det \Lambda}.$$

Υπόδειξη. Έστω $R > 0$. Το πλήθος $N(R)$ των $x + rB_2^n$, $x \in \Lambda$, που τέμνουν την RB_2^n, ικανοποιεί την ανισότητα

$$|RB_2^n \cap \Lambda| \leq N(R) \leq |(R + r)B_2^n \cap \Lambda|.$$

Άρα,
$$\frac{|RB_2^n \cap \Lambda|}{|RB_2^n|} \leq \frac{N(R)}{|RB_2^n|} \leq \frac{|(R+r)B_2^n \cap \Lambda|}{|RB_2^n|}.$$
Γράφοντας $\Lambda = T(\mathbb{Z}^n)$, $B_2^n = T(K)$, παίρνοντας όριο καθώς $R \to \infty$, και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1, βλέπουμε ότι
$$\frac{1}{\det \Lambda} = \frac{1}{|\det T|} = \lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{\omega_n R^n}.$$
Άρα, υπάρχει το
$$\delta(P) = \lim_{R\to\infty} \frac{N(R)\omega_n r^n}{\omega_n R^n} = \frac{\omega_n r^n}{\det \Lambda}.$$

12. *Ορίζουμε δ_n το supremum των $\delta(P)$, όπου P packing με μπάλες ακτίνας 1 και κέντρα σε κάποιο πλέγμα Λ του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\alpha_n = 2^n \delta_n$.*

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 10 είδαμε ότι $\Delta(B_2^n)\alpha_n = \omega_n$. Από την Άσκηση 11 παίρνουμε
$$\delta_n = \sup_{\Lambda} \frac{\omega_n}{\det \Lambda}$$
όπου το supremum είναι ως προς όλα τα πλέγματα Λ που επιδέχονται packing από μπάλες ακτίνας 1. Παρατηρούμε ότι ένα πλέγμα Λ έχει αυτή την ιδιότητα αν και μόνο αν είναι $2B_2^n$-αποδεκτό (εξηγήστε γιατί). Άρα,
$$\delta_n = \frac{\omega_n}{2^n \Delta(B_2^n)}.$$
Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις βλέπουμε ότι
$$\delta_n = \frac{\alpha_n}{2^n}.$$

Κεφάλαιο 4

Υπερεπίπεδα στήριξης και διαχωριστικά θεωρήματα

1. *Έστω* $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ *με την εξής ιδιότητα: κάθε* $x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$ *γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των* $x_0, x_1, \ldots, x_k$. *Δείξτε ότι τα* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *είναι αφινικά ανεξάρτητα.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=0}^k t_i = 0$ και $\sum_{i=0}^k t_i x_i = 0$. Αν οι t_i δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν και αν θέσουμε $I = \{i : t_i > 0\}$ και $J = \{i : t_i \leq 0\}$, τότε

$$t = \sum_{i \in I} t_i = \sum_{i \in J} (-t_i) > 0.$$

Ειδικότερα, το I είναι μη κενό. Θεωρούμε το

$$(*) \qquad x = \sum_{i \in I} \frac{t_i}{t} x_i = \sum_{i \in J} \frac{-t_i}{t} x_i.$$

Αφού $\sum_{i \in I} \frac{t_i}{t} = \sum_{i \in J} \frac{-t_i}{t} = 1$, το x είναι κυρτός συνδυασμός των x_i. Αν σταθεροποιήσουμε $i_0 \in I$ από την υπόθεση πρέπει οι συντελεστές του x_{i_0} στις δύο αναπαραστάσεις του x στην $(*)$ να συμπίπτουν: τότε $t_{i_0} = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

2. *Έστω* C *μη κενό, κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$. *Δείξτε ότι:*

(i) $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$.

(ii) $\mathrm{ri}(C) = \mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C))$.

(iii) $\mathrm{rb}(C) = \mathrm{rb}(\overline{C}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(C))$.

Υπόδειξη. (i) Αφού $\mathrm{ri}(C) \subseteq C \subseteq \overline{C}$, ισχύει η $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C)) \subseteq \mathrm{aff}(C) \subseteq \mathrm{aff}(\overline{C})$. Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{aff}(\overline{C})$. Υπάρχουν $x_i \in \overline{C}$ και $t_i \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ ώστε $x = \sum_{i=1}^m t_i x_i$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ υπάρχει ακολουθία (x_{ik}) στο C με $x_{ik} \to x_i$ όταν $k \to \infty$. Τότε, $x_k = \sum_{i=1}^m t_i x_{ik} \in$

$\mathrm{aff}(C)$ και $x_k \to x$, άρα $x \in \overline{\mathrm{aff}(C)}$. Αφού η $\mathrm{aff}(C)$ είναι κλειστό σύνολο, έχουμε $\overline{\mathrm{aff}(C)} = \mathrm{aff}(C)$. Συνεπώς, $x \in \mathrm{aff}(C)$ και $\mathrm{aff}(\overline{C}) \subseteq \mathrm{aff}(C)$.

Τέλος, αφού $\overline{C} = \overline{\mathrm{ri}(C)}$, το προηγούμενο δείχνει ότι $\mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\overline{\mathrm{ri}(C)}) \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$.

(ii) Αφού $\mathrm{aff}(C) = \mathrm{aff}(\overline{C}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(C))$ και $\mathrm{ri}(C) \subseteq C \subseteq \overline{C}$, από τον ορισμό του σχετικού εσωτερικού έχουμε $\mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C)) \subseteq \mathrm{ri}(C) \subseteq \mathrm{ri}(\overline{C})$.

Έστω $x \in \mathrm{ri}(\overline{C})$. Θεωρούμε και κάποιο $y \in \mathrm{ri}(C)$. Αν $x = y$ έχουμε $x \in \mathrm{ri}(C)$. Αν $x \neq y$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει $z \in \overline{C}$ ώστε $x \in (y, z)$ (εφαρμογή του Θεωρήματος 4.2.5 για το $2y - x \neq x$). Πάλι από το Θεώρημα 4.2.5, αφού $y \in \mathrm{ri}(C)$ και $z \in \overline{C}$, έχουμε $(y, z) \subseteq \mathrm{ri}(C)$. Άρα $x \in \mathrm{ri}(C)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathrm{ri}(\overline{C}) \subseteq \mathrm{ri}(C)$.

Τέλος, αφού $\overline{C} = \overline{\mathrm{ri}(C)}$, εφαρμόζοντας το προηγούμενο με το $\mathrm{ri}(C)$ στη θέση του C παίρνουμε τον ισχυρότερο εγκλεισμό $\mathrm{ri}(\overline{C}) \subseteq \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C))$.

(iii) Άμεσο από το (ii). Για παράδειγμα,

$$\mathrm{rb}(C) = \overline{C} \setminus \mathrm{ri}(C) = \overline{\overline{C}} \setminus \mathrm{ri}(\overline{C}) = \mathrm{rb}(\overline{C}).$$

3. *Έστω C_1, C_2 μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι*

$$\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε, μεταφέροντας τα C_1 και C_2, να υποθέσουμε ότι $0 \in C_1 \cap C_2$. Τότε,

$$\mathrm{aff}(C_1 + C_2) = \mathrm{span}(C_1 + C_2) = \mathrm{span}(C_1) + \mathrm{span}(C_2) = \mathrm{aff}(C_1) + \mathrm{aff}(C_2).$$

Έστω $x_1 \in \mathrm{ri}(C_1)$ και $x_2 \in \mathrm{ri}(C_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1 + x_2 \in \mathrm{ri}(C_1 + C_2)$. Έστω $z \in \mathrm{aff}(C_1 + C_2)$, $z \neq x_1 + x_2$. Τότε $z = y_1 + y_2$ για κάποια $y_1 \in \mathrm{aff}(C_1)$ και $y_2 \in \mathrm{aff}(C_2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_i \neq x_i$ (αλλιώς, το πρόβλημα είναι απλούστερο). Αφού $x_1 \in \mathrm{ri}(C_1)$, υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε $(1 - t)x_1 + ty_1 \in C_1$. Όμοια, υπάρχει $s \in (0, 1)$ ώστε $(1 - s)x_2 + sy_2 \in C_2$. Αν $0 \leq r \leq \min\{t, s\}$ τότε $(1 - r)x_i + ry_i \in C_i$ για $i = 1, 2$, άρα $(1 - r)(x_1 + x_2) + r(y_1 + y_2) \in C_1 + C_2$. Δηλαδή, υπάρχει $z \in (x_1 + x_2, y_1, y_2)$ ώστε $[x_1 + x_2, z] \subseteq C_1 + C_2$. Έπεται ότι $x_1 + x_2 \in \mathrm{ri}(C_1 + C_2)$ και αυτό δείχνει ότι $\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2) \subseteq \mathrm{ri}(C_1 + C_2)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, δείχνουμε πρώτα ότι

$$\overline{C_1 + C_2} = \overline{\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)}.$$

Τότε, από την Άσκηση 2 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{ri}(C_1 + C_2) &= \mathrm{ri}(\overline{C_1 + C_2}) = \mathrm{ri}(\overline{\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)}) \\ &= \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)) \subseteq \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2). \end{aligned}$$

4. *Έστω C_1, C_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι*

$$\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2).$$

Ισχύει το ίδιο για τυχόντα μη κενά κυρτά $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$;

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2)$. Θεωρούμε $y \in \mathrm{aff}(C_1 \cap C_2)$ με $y \neq x$ και θα βρούμε $z \in (x, y)$ ώστε $[x, z] \subseteq C_1 \cap C_2$ (από το Θεώρημα 4.2.5 έπεται ότι $x \in \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$). Παρατηρούμε ότι $\mathrm{aff}(C_1 \cap C_2) \subseteq \mathrm{aff}(C_1)$, άρα $y \in \mathrm{aff}(C_1)$. Αφού $x \in \mathrm{ri}(C_1)$, υπάρχει $z_1 \in (x, y)$ ώστε $[x, z_1] \subseteq C_1$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι υπάρχει $z_2 \in (x, y)$ ώστε $[x, z_2] \subseteq C_2$. Αφού $z_1, z_2 \in (x, y)$ έχουμε $[x, z_1] \subseteq [x, z_2]$ ή $[x, z_2] \subseteq [x, z_1]$. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $z \in (x, y)$ (κάποιο από τα z_1, z_2) ώστε $[x, z] \subseteq [x, z_i] \subseteq C_i$ για $i = 1, 2$, δηλαδή $[x, z] \subseteq C_1 \cap C_2$. Συνεπώς, $x \in \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$ και έχουμε δείξει ότι $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) \subseteq \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$. Θεωρούμε και κάποιο $z \in \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq z$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αφού $x \in \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$ και $z \in C_1 \cap C_2$, υπάρχει $u \in C_1 \cap C_2$ ώστε $x \in (u, z)$.

Έστω τώρα $y \in \mathrm{aff}(C_1)$, $y \neq x$. Υποθέτουμε ότι το y δεν ανήκει στην ευθεία των x, z, u, αλλιώς το πρόβλημα είναι απλούστερο. Αφού $z \in \mathrm{ri}(C_1)$, υπάρχει $v \in C_1$ ώστε $z \in (v, y)$. Τα x, y, z, u, v βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και το x είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου uvy. Άρα, υπάρχει $w \in (u, v)$ ώστε $x \in (y, w)$. Αφού τα u, v ανήκουν στο C_1, έχουμε $w \in C_1$. Δηλαδή, για κάθε $y \in \mathrm{aff}(C_1)$, $y \neq x$, βρήκαμε $w \in C_1$ ώστε $x \in (y, w)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in \mathrm{ri}(C_1)$ (από το Θεώρημα 4.2.5). Όμοια δείχνουμε ότι $x \in \mathrm{ri}(C_1)$. Αφού το $x \in \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2)$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) \subseteq \mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2)$.

Σημείωση. Αν $C_1 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ και $C_2 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ τότε $C_1 \cap C_2 = \mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \{(0, 0)\}$ και $\mathrm{ri}(C_1) \cap \mathrm{ri}(C_2) = \emptyset$.

5. *Έστω $\{C_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i\in I} \mathrm{ri}(C_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι*

$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $i \in I$ έχουμε $C_i \subseteq \overline{C_i}$, συνεπώς

$$\bigcap_{i\in I} C_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}.$$

Το σύνολο $\bigcap\limits_{i\in I} \overline{C_i}$ είναι κλειστό, άρα

$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση σταθεροποιούμε $y \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{ri}(C_i)$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \bigcap\limits_{i\in I} \overline{C_i}$ και θα δείξουμε ότι $x \in \overline{\bigcap\limits_{i\in I} C_i}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε $y \in \mathrm{ri}(C_i)$ και $x \in \overline{C_i}$, άρα $[y, x) \subseteq \mathrm{ri}(C_i) \subseteq C_i$. Έπεται ότι $[y, x) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} C_i$. Αφού $x \in \overline{[y, x)}$, συμπεραίνουμε ότι $x \in \overline{\bigcap\limits_{i\in I} C_i}$.

6. *Έστω $S = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$ ένα n–simplex στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $y \in \mathrm{int}(S)$. Δείξτε ότι τα*

$$S_i = \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\}), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

είναι n–simplices, ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά, και

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $y \in \text{int}(S)$, υπάρχουν $0 < a_i < 1$ ώστε $y = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε S_i είναι simplex: αρκεί να δείξουμε ότι τα $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα. Έστω $t_j \in \mathbb{R}$ με $\sum_{j=0}^n t_j = 0$ και $t_0x_0 + \cdots + t_{i-1}x_{i-1} + t_iy + t_{i+1}x_{i+1} + \cdots + t_nx_n = 0$. Αντικαθιστώντας το y παίρνουμε

$$t_0x_0 + \cdots + t_{i-1}x_{i-1} + t_i\sum_{j=0}^n a_jx_j + t_{i+1}x_{i+1} + \cdots + t_nx_n = 0,$$

δηλαδή

$$\sum_{j\neq i}(t_j + a_jt_i)x_j + t_ia_ix_i = 0.$$

Αφού τα $x_0, x_1, \ldots, x_n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα, έχουμε $t_ia_i = 0$ και $t_j + a_jt_i = 0$ για κάθε $j \neq i$. Αφού $a_i \neq 0$, από την $t_ia_i = 0$ βλέπουμε ότι $t_i = 0$. Τότε, η $t_j + a_jt_i = 0$ μας δίνει ότι $t_j = 0$ για $j \neq i$. Συνεπώς, $t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$.

Έστω $i \neq j$ και έστω $x \in \text{int}(S_i) \cap \text{int}(S_j)$. Τότε, υπάρχουν $t_k, s_k \in (0,1)$ με $\sum_{k=0}^n t_k = \sum_{k=0}^n s_k = 1$ ώστε

$$x = \sum_{k\neq i} t_kx_k + t_iy = \sum_{k\neq j} s_kx_k + s_jy.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k\neq i,j}(t_k - s_k)x_k + t_jx_j - s_ix_i + t_iy - s_jy = 0.$$

Αντικαθιστώντας το y παίρνουμε

$$\sum_{k\neq i,j}(t_k - s_k)x_k + t_jx_j - s_ix_i + \sum_{k=0}^n(t_i - s_j)a_kx_k = 0,$$

δηλαδή

$$\sum_{k\neq i,j}(t_k - s_k + (t_i - s_j)a_k)x_k + ((t_i - s_j)a_i - s_i)x_i + ((t_i - s_j)a_j + t_j)x_j = 0.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 0. Αφού τα x_k είναι αφινικά ανεξάρτητα, έχουμε

$$(t_i - s_j)a_i - s_i = (t_i - s_j)a_j + t_i = 0.$$

Όμως, αν $t_i - s_j \geq 0$ έχουμε $(t_i - s_j)a_j + t_i \geq t_i > 0$ και αν $t_i - s_j < 0$ έχουμε $(t_i - s_j)a_i - s_i < -s_i < 0$. Σε κάθε περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο.

Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$ έχουμε $S_i \subseteq S$: τα y, x_j, $j \neq i$ ανήκουν στο S και το S είναι κυρτό, άρα $S_i = \text{conv}(\{x_0, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\}) \subseteq S$. Έπεται ότι $S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n \subseteq S$.

Αντίστροφα, έστω $x \in S$. Υπάρχουν $t_k \geq 0$ με $\sum_{k=0}^n t_k = 1$ ώστε $x = \sum_{k=0}^n t_kx_k$. Επίσης, υπάρχει j ώστε

$$\frac{t_j}{a_j} = \min\left\{\frac{t_k}{a_k} : k = 0, 1, \ldots, n\right\}.$$

Ορίζουμε

$$s_k = t_k - \frac{t_j}{a_j} a_k, \qquad k \neq j$$

και $s_j = \frac{t_j}{a_j}$. Τότε, $s_k \geq 0$ και

$$\sum_{k=0}^{n} s_k = \sum_{k\neq j} \left(t_k - \frac{t_j}{a_j} a_k \right) + \frac{t_j}{a_j} = \sum_{k\neq j} t_k - \frac{t_j}{a_j} \sum_{k\neq j} a_k + \frac{t_j}{a_j} = 1 - t_j - \frac{t_j}{a_j}(1-a_j) + \frac{t_j}{a_j} = 1.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq j} s_k x_k + s_j y &= \sum_{k\neq j} \left(t_k - \frac{t_j}{a_j} a_k \right) x_k + \frac{t_j}{a_j} \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \\
&= \sum_{k\neq j} \left(t_k - \frac{t_j}{a_j} a_k + \frac{t_j}{a_j} a_k \right) x_k + t_j x_j \\
&= \sum_{k\neq j} t_k x_k + t_j x_j = x.
\end{aligned}$$

Άρα, $x \in S_j \subseteq S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$.

7. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι*

$$\overline{\mathrm{conv}(A)} = \bigcap \{ B \subseteq \mathbb{R}^n : B \supseteq A,\ B \text{ κλειστό και κυρτό} \}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $C = \bigcap \{ B \subseteq \mathbb{R}^n : B \supseteq A,\ B \text{ κλειστό και κυρτό} \}$. Από τον ορισμό του C, αν B είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $A \subseteq B$ τότε $C \subseteq B$. Αφού το $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ είναι κλειστό κυρτό και περιέχει το A, βλέπουμε ότι

$$C \subseteq \overline{\mathrm{conv}(A)}.$$

Αντίστροφα, πάλι από τον ορισμό του C, είναι φανερό ότι $A \subseteq C$ (το C είναι τομή συνόλων που περιέχουν το A, άρα περιέχει το A). Επίσης, το C είναι κυρτό σύνολο ως τομή κυρτών συνόλων, άρα $\mathrm{conv}(A) \subseteq C$. Τέλος, το C είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων, άρα

$$\overline{\mathrm{conv}(A)} \subseteq C.$$

Οι δύο εγκλεισμοί δείχνουν το ζητούμενο.

8. *Δώστε παράδειγμα κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο. Μπορείτε να βρείτε αντίστοιχο παράδειγμα στο $\mathbb{R}$;*

Υπόδειξη. Το σύνολο $A = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, αλλά η κυρτή του θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο (εξηγήστε γιατί).

Αν A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\mathrm{conv}(A) = [\min(A), \max(A)]$ αν το A είναι φραγμένο (εξηγήστε τι συμβαίνει αν το A δεν είναι άνω ή κάτω φραγμένο). Σε κάθε περίπτωση, η κυρτή θήκη του A είναι κλειστό σύνολο.

9. *Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$, τότε $x - p_C(x) = y - P_C(y)$.*

Αν $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, τι συμπεραίνετε για το C;

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$. Γνωρίζουμε ότι $\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0$ και $\langle p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0$, άρα

$$\langle x - p_C(x) + p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|x - y\|_2^2 &= \|(x - p_C(x) + p_C(y) - y) + (p_C(x) - p_C(y))\|_2^2 \\
&= \|x - p_C(x) + p_C(y) - y\|_2^2 + 2\langle x - p_C(x) + p_C(y) - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \\
&\quad + \|p_C(x) - p_C(y)\|_2^2 \\
&= \|x - p_C(x) + p_C(y) - y\|_2^2 - 2\langle x - p_C(x) + p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle + \|x - y\|_2^2 \\
&\geq \|x - p_C(x) + p_C(y) - y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|x - p_C(x) + p_C(y) - y\|_2 = 0$, άρα $x - p_C(x) = y - p_C(y)$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι, αφού $C \neq \emptyset$, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (οποιοδήποτε σημείο του C) ώστε $p_C(x_0) = x_0$, δηλαδή $x_0 - p_C(x_0) = 0$. Η υπόθεση ότι $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, σε συνδυασμό με το προηγούμενο ερώτημα, μας εξασφαλίζει ότι

$$x - p_C(x) = x_0 - p_C(x_0) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Άρα, $x \in C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς, $C = \mathbb{R}^n$.

10*. *Έστω A μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $p_A(x) \in A$ ώστε $\|x - p_A(x)\|_2 = d(x, A)$. Δείξτε ότι το A είναι κυρτό.*

11. *Έστω K ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ από κλειστές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$ ώστε*

$$K = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε C για την τομή όλων των $B(x_i, r_i)$ (όπου $x_i \in \mathbb{R}^n$ και $r_i > 0$) που περιέχουν το K. Προφανώς, $K \subseteq C$.

Συμβολίζουμε με d τη διάμετρο του K. Έστω $y \notin K$. Θέτουμε $z = p_K(y)$, $w = \frac{y+z}{2}$, $u = \frac{z-y}{\|z-y\|_2}$ και $s = \|z - w\|_2$. Για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x - z, u\rangle \geq 0.$$

Συνεπώς, για κάθε $t > 0$,

$$\|x - (z + tu)\|_2^2 = \|x - z\|_2^2 - 2t\langle x - z, u\rangle + t^2 \leq d^2 + t^2.$$

Αν $t \geq \frac{d^2}{2s}$ τότε $d^2 + t^2 \leq (t+s)^2$, άρα

$$x \in B(z + tu, \sqrt{d^2 + t^2}) \subseteq B(z + tu, t + s).$$

Άφού το $x \in K$ ήταν τυχόν,

$$K \subseteq B(z + tu, t + s).$$

Όμως, τα $z - y$ και u είναι ομόρροπα, άρα

$$\|y - (z + tu)\|_2 = t + \|z - y\|_2 = t + 2s > t + s,$$

δηλαδή $y \notin B(z + tu, t + s)$. Άρα, $y \notin C$. Αυτό αποδεικνύει ότι $C \subseteq K$.

12. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το κέντρο βάρους του K είναι το σημείο $y = (y_1, \ldots, y_n)$ με συντεταγμένες*

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle \, dx, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι $y \in K$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $y \notin K$. Τότε, το $\{y\}$ διαχωρίζεται αυστηρά από το K: υπάρχουν $z \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\max_{x \in K} \langle x, z \rangle \leq \alpha < \langle y, z \rangle.$$

Τότε,

$$\frac{1}{|K|} \int_K \langle x, z \rangle \, dx \leq \frac{1}{|K|} \int_K \alpha \, dx = \alpha$$

και, ταυτόχρονα, από την

$$\langle x, z \rangle = \sum_{i=1}^n x_i z_i = \sum_{i=1}^n z_i \langle x, e_i \rangle$$

έχουμε

$$\frac{1}{|K|} \int_K \langle x, z \rangle \, dx = \sum_{i=1}^n z_i \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle \, dx = \sum_{i=1}^n z_i y_i = \langle y, z \rangle > \alpha,$$

το οποίο είναι άτοπο.

13. (α) *Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.*

(β) *Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το C είναι μη κενό γνήσιο κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και το C^c είναι κυρτό. Τα C και C^c διαχωρίζονται: υπάρχει υπερεπίπεδο H ώστε $C \subseteq \overline{H}_+$ και $C^c \subseteq \overline{H}_-$. Από τη δεύτερη σχέση, παίρνοντας συμπληρώματα, έχουμε $C \supseteq H_+$. Αφού το C είναι κλειστό, έπεται ότι $C \supseteq \overline{H}_+$. Άρα, $C = \overline{H}_+$. Δηλαδή, το C είναι κλειστός ημίχωρος ή $C = \mathbb{R}^n$ ή $C = \emptyset$.

Αντίστροφα, εύκολα ελέγχουμε ότι όλα αυτά τα σύνολα είναι κλειστά κυρτά και έχουν κυρτό συμπλήρωμα.

(β) Γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό κλειστό κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bd}(C) \neq \emptyset$ έχει υπερεπίπεδα στήριξης. Αν λοιπόν το C δεν έχει υπερεπίπεδα στήριξης τότε είτε $C = \emptyset$ ή $C \neq \emptyset$ και $\mathrm{int}(C) = \overline{C} = C$, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν $C = \mathbb{R}^n$.

14. (α) *Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν διαχωρίζονται γνήσια;*

(β) *Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία να διαχωρίζονται γνήσια αλλά να μην διαχωρίζονται αυστηρά;*

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τα σύνολα $A = \left\{(x,y) : y \geq \frac{1}{x},\, x > 0\right\}$ και $B = \{(x,y) : y \leq 0\}$ στο $\mathbb{R}^2$.

(β) Θεωρήστε τα σύνολα $A = \left\{(x,y) : y \geq \frac{1}{x},\, x > 0\right\}$ και $B = \left\{(x,y) : y \leq -\frac{1}{x},\, x > 0\right\}$.

15. *Έστω C μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το C είναι κλειστό αν και μόνο αν το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε ευθεία ℓ στον $\mathbb{R}^n$.*

Υπόδειξη. Κάθε ευθεία είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν λοιπόν το C είναι κλειστό, τότε το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε ευθεία ℓ στον $\mathbb{R}^n$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι C είναι μη κενό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ότι το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε ευθεία ℓ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \mathrm{bd}(C)$ και θα δείξουμε ότι $x \in C$ (έπεται το ζητούμενο). Υπάρχει $y \in \mathrm{ri}(C)$, και τότε, $[y,x) \subseteq C$. Θεωρούμε την ευθεία ℓ που ορίζεται από τα x και y. Τότε, το $C \cap \ell$ είναι κλειστό σύνολο και $[y,x) \subseteq C \cap \ell$, άρα $\overline{[y,x)} \subseteq C \cap \ell$. Όμως, $x \in \overline{[y,x)}$. Συνεπώς, $x \in C \cap \ell$ και, ειδικότερα, $x \in C$.

16. (α) *Έστω $T = \mathrm{conv}(\{v_1,\dots,v_m\})$. Δείξτε ότι*

$$T^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j\rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1,\dots,m\}.$$

(β) *Έστω $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$ και*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j\rangle \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1,\dots,m\}.$$

Δείξτε ότι $P^\circ = \mathrm{conv}(\{0, v_1,\dots,v_m\})$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_j\rangle \leq 1$ για κάθε $j = 1,\dots,m\}$. Έστω $x \in T^\circ$. Τότε, $\langle x, v\rangle \leq 1$ για κάθε $v \in T$. Ειδικότερα, $\langle x, v_j\rangle \leq 1$ για κάθε $j = 1,\dots,m$, άρα $x \in P$. Αυτό δείχνει ότι $T^\circ \subseteq P$.

Αντίστροφα, έστω $x \in P$ και έστω $v \in T$. Υπάρχουν $t_i \geq 0$ με $\sum_{j=1}^m t_j = 1$ και $v = \sum_{j=1}^m t_j v_j$. Τότε,

$$\langle x, v\rangle = \sum_{j=1}^m t_j \langle x, v_j\rangle \leq \sum_{j=1}^m t_j = 1.$$

Αφού το $v \in T$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $x \in T^\circ$. Άρα, $P \subseteq T^\circ$.

(β) Από το (α), αν $T = \mathrm{conv}(\{v_1,\dots,v_m\})$ έχουμε $P = T^\circ$. Συνεπώς,

$$P^\circ = T^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(T \cup \{0\})} = \overline{\mathrm{conv}(\{0, v_1,\dots,v_m\})} = \mathrm{conv}(\{0, v_1,\dots,v_m\}).$$

17. *Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι*

$$(A \cap B)^\circ = \overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

Υπόδειξη. Από τις βασικές ιδιότητες των πολικών συνόλων έχουμε τα εξής: $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, άρα $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ$ και $(A \cap B)^\circ \supseteq B^\circ$. Συνεπώς,

$$(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ.$$

Επίσης, το $(A \cap B)^\circ$ είναι κλειστό και κυρτό, άρα

$$(A \cap B)^\circ \supseteq \overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

Υποθέτουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $x \in (A \cap B)^\circ$ με $x \notin \overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}$. Μπορούμε να διαχωρίσουμε αυστηρά το x από το $\overline{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}$, δηλαδή υπάρχουν $z \neq 0$ και $d \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\langle z, x\rangle > d > \langle z, y\rangle$$

για κάθε $y \in A^\circ \cup B^\circ$. Αφού $0 \in A^\circ$, έχουμε $d > 0$. Θέτοντας $u = \frac{1}{d} z$ έχουμε $u \neq 0$ και

$$\langle u, x\rangle > 1 > \langle u, y\rangle$$

για κάθε $y \in A^\circ \cup B^\circ$. Από την $\langle u, y\rangle < 1$ για κάθε $y \in A^\circ$ έπεται ότι $u \in A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})} = A$, διότι το A είναι κλειστό κυρτό και περιέχει το 0. Όμοια, $u \in B$, δηλαδή $u \in A \cap B$. Όμως, $x \in (A \cap B)^\circ$, άρα

$$\langle u, x\rangle \leq 1,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Κεφάλαιο 5

Κυρτές συναρτήσεις

1. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν x, y στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $f(x) < f(y)$. Η f είναι κυρτή, άρα έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο y: υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$f(z) \geq f(y) + \langle u, z - y\rangle$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας $z = x$ βλέπουμε ότι

$$\langle u, x - y\rangle \leq f(x) - f(y) < 0.$$

Θέτοντας $z = y - t(x - y)$ παίρνουμε

$$f(y) - \langle u, t(x - y)\rangle \leq f(y - t(x - y)) \leq M,$$

δηλαδή

$$-t\langle u, x - y\rangle \leq M - f(y)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αφού $\langle u, x - y\rangle < 0$, αφήνοντας το $t \to +\infty$ καταλήγουμε σε άτοπο.

2. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση και έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει αφινική συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f - g$ είναι κυρτή και άνω φραγμένη από το 0. Από την Άσκηση 1, η $f - g$ είναι σταθερή: υπάρχει $c \geq 0$ ώστε $g(x) = f(x) + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, αφού η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη, εύκολα ελέγχουμε ότι η $g = f + c$ είναι αφινική συνάρτηση (είναι ταυτόχρονα κυρτή και κοίλη). Το ίδιο ισχύει και για την $f = g - c$. Τότε, για κάθε $0 \leq r \leq c$, η $h(x) = f(x) + r$ είναι αφινική συνάρτηση και ικανοποιεί την $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

3. *Έστω V μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : V \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν C είναι μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του V τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο C.*

Υπόδειξη. Από τη συμπάγεια του C μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $C + \varepsilon B_2^n$ να περιέχεται στο C (εξηγήστε γιατί). Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο V, άρα και στο $C+\varepsilon B_2^n$. Αφού το $C + \varepsilon B_2^n$ είναι συμπαγές (εξηγήστε γιατί), υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in C + \varepsilon B_2^n$.

Θεωρούμε τυχόντα $y \neq z$ στο C. Αν $w = z + \varepsilon \frac{z-y}{\|z-y\|_2}$, τότε $w \in C + \varepsilon B_2^n$ και $\|w - z\|_2 = \varepsilon$. Θεωρώντας την f ως κυρτή συνάρτηση στην ευθεία των y, z, w και εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών, παίρνουμε

$$\frac{f(z) - f(y)}{\|y - z\|_2} \leq \frac{f(w) - f(z)}{\|w - z\|_2} \leq \frac{|f(w)| + |f(z)|}{\varepsilon} \leq \frac{2M}{\varepsilon}.$$

Δηλαδή,

$$f(z) - f(y) \leq \frac{2M}{\varepsilon} \|y - z\|_2.$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε και την $f(y) - f(z) \leq \frac{2M}{\varepsilon} \|y - z\|_2$. Δηλαδή,

$$|f(z) - f(y)| \leq \frac{2M}{\varepsilon} \|y - z\|_2$$

για κάθε $y, z \in C$.

4. *Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \to \mathbb{R}$.*
(α) *Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν*

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

για κάθε $x, y \in C$.
(β) *Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x \in C$ και για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j \geq 0.$$

Υπόδειξη. (α) Από την κυρτότητα της f για κάθε $x, y \in C$ ισχύουν οι

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

και

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle = -\langle \nabla f(y), y - x \rangle.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle \leq 0,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ζητούμενη.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: έστω $x \neq y$ στο C. Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f((1 - t)x + ty) = f(x + t(y - x))$. Τότε, υπάρχει $s \in (0, 1)$ ώστε

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(s) = \langle \nabla f((1 - s)x + sy), y - x \rangle.$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$\langle \nabla f((1-s)x+sy) - \nabla f(x), (1-s)x+sy-x\rangle \geq 0,$$

δηλαδή

$$s\langle \nabla f((1-s)x+sy) - \nabla f(x), y-x\rangle \geq 0.$$

Συνεπώς,

$$f(y)-f(x) = \langle \nabla f((1-s)x+sy), y-x\rangle \geq \langle \nabla f(x), y-x\rangle.$$

Αν σταθεροποιήσουμε το $x\in C$, η τελευταία σχέση δείχνει ότι η f έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x. Αφού το $x\in C$ ήταν τυχόν, η f είναι κυρτή.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x\in C$ και $u\neq 0$. Αφού το C είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $x+tu\in C$ για κάθε $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ με $g(t)=f(x+tu)$. Η g είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα $g''(0)\geq 0$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+tu)u_i u_j,$$

συνεπώς

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)u_i u_j = g''(0) \geq 0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in C$ και για κάθε $u\in\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)u_i u_j \geq 0.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι κυρτή, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $x\neq y$ στο C, η συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $h(t)=f(x+t(y-x))$ είναι κυρτή. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και

$$h''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+t(y-x))(y_i-x_i)(y_j-x_j) \geq 0,$$

αν εφαρμόσουμε την υπόθεση στο $x+t(y-x)\in C$ με $u=y-x$. Συνεπώς, η h είναι κυρτή.

5. *Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x,C)$.*

(α) *Έστω $x\notin C$. Δείξτε ότι*

$$\nabla f(x) = \frac{x-p_C(x)}{\|x-p_C(x)\|_2}.$$

(β) *Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n\setminus C$.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $i=1,\ldots,n$ και για αρκετά μικρό $t>0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} &= \frac{\|x+te_i-p_C(x+te_i)\|_2 - \|x-p_C(x)\|_2}{t}\\ &\leq \frac{\|x+te_i-p_C(x)\|_2 - \|x-p_C(x)\|_2}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\|x - p_C(x) + te_i\|_2^2 - \|x - p_C(x)\|_2^2}{t(\|x - p_C(x) + te_i\|_2 + \|x - p_C(x)\|_2)} \\ &= \frac{2t\langle x - p_C(x), e_i\rangle + t^2}{t(\|x - p_C(x) + te_i\|_2 + \|x - p_C(x)\|_2)} \\ &= \frac{2\langle x - p_C(x), e_i\rangle + t}{\|x - p_C(x) + te_i\|_2 + \|x - p_C(x)\|_2}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$(*) \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{2\langle x - p_C(x), e_i\rangle + t}{\|x - p_C(x) + te_i\|_2 + \|x - p_C(x)\|_2} = \left\langle \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}, e_i \right\rangle.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} &= \frac{\|x + te_i - p_C(x+te_i)\|_2 - \|x - p_C(x)\|_2}{t} \\ &= \frac{\|x + te_i - p_C(x+te_i)\|_2\|x - p_C(x)\|_2 - \|x - p_C(x)\|_2^2}{t\|x - p_C(x)\|_2} \\ &\geq \frac{\langle x + te_i - p_C(x+te_i), x - p_C(x)\rangle - \langle x - p_C(x), x - p_C(x)\rangle}{t\|x - p_C(x)\|_2} \\ &= \frac{\langle p_C(x) - p_C(x+te_i), x - p_C(x)\rangle + t\langle x - p_C(x), e_i\rangle}{t\|x - p_C(x)\|_2} \\ &\geq \left\langle \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}, e_i \right\rangle, \end{aligned}$$

διότι $\langle p_C(x) - p_C(x+te_i), x - p_C(x)\rangle \geq 0$ (ισχύει $\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq 0$ για κάθε $y \in C$).

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \left\langle \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}, e_i \right\rangle.$$

Δηλαδή,

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}.$$

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο x, διότι η συνάρτηση $x \mapsto \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n \setminus C$. Έπεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x.

6. *Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν $C = \mathrm{conv}(A \cup B)$ δείξτε ότι*

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Αφού $A, B \subseteq C$, ισχύουν οι $h_A(x) \leq h_C(x)$ και $h_B(x) \leq h_C(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$\max\{h_A(x), h_B(x)\} \leq h_C(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω $c \in C$ ώστε $h_C(x) = \langle x, c\rangle$. Αφού $c \in \mathrm{conv}(A \cup B)$, υπάρχουν $t \in [0,1]$, $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $c = (1-t)a + tb$. Τότε,

$$h_C(x) = \langle x, (1-t)a + tb\rangle = (1-t)\langle x, a\rangle + t\langle x, b\rangle \leq (1-t)h_A(x) + th_B(x),$$

απ' όπου έπεται άμεσα ότι

$$h_C(x) \leq \max\{h_A(x), h_B(x)\}.$$

7. *Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι*

$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Ένας τρόπος είναι με τον ορισμό της συνάρτησης στάθμης. Ένας άλλος είναι να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη άσκηση και τις σχέσεις δυϊσμού: αφού $0 \in \mathrm{int}(A)$, έχουμε $g_A = h_{A^\circ}$. Ομοίως, $g_B = h_{B^\circ}$. Από την προηγούμενη άσκηση,

$$\begin{aligned} \max\{g_A(x), g_B(x)\} &= \max\{h_{A^\circ}(x), h_{B^\circ}(x)\} = h_{\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}(x) \\ &= g_{[\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)]^\circ}(x) = g_{(A^{\circ\circ} \cap B^{\circ\circ})}(x) \\ &= g_{A\cap B}(x). \end{aligned}$$

8. *Έστω $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή, θετικά ομογενής συνάρτηση. Δείξτε ότι:*

(i) $h'(u;u) = h(u)$ και $h'(u;-u) = -h(u)$,

(ii) $h'(u;y) \leq h(y)$,

όπου $h'(x;u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u.

Υπόδειξη. (i) Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η h είναι θετικά ομογενής, γράφουμε

$$\begin{aligned} h'(u;u) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{h(u+tu) - h(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h((1+t)u) - h(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)h(u) - h(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{th(u)}{t} \\ &= h(u). \end{aligned}$$

Ομοίως, για $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} h'(u;-u) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{h(u-tu) - h(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h((1-t)u) - h(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1-t)h(u) - h(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-th(u)}{t} \\ &= -h(u). \end{aligned}$$

(ii) Αφού η h είναι κυρτή και θετικά ομογενής, έχουμε

$$h(u+ty) = 2h\left(\frac{u+ty}{2}\right) \leq 2\frac{h(u) + h(ty)}{2} = h(u) + h(ty) = h(u) + th(y)$$

για κάθε $t > 0$ και $u, y \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$h'(u;y) = \lim_{t\to 0^+} \frac{h(u+ty)-h(u)}{t} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{h(u)+th(y)-h(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{th(y)}{t} = h(y).$$

9. *Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $u \neq 0$. Ορίζουμε*

$$L = \{x \in C : h_C(u) = \langle x, u\rangle\}.$$

Δείξτε ότι:

(i) $h'_C(u;y) = h_L(y)$ *για κάθε* $y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) *Η h_C είναι διαφορίσιμη στο u αν και μόνο αν το L είναι μονοσύνολο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $h_L \leq h_C$ διότι $L \subseteq C$ και

$$h_L(u+ty) = \max_{x\in L}(\langle x,u\rangle + t\langle x,y\rangle) = \max_{x\in L}(h_C(u)+t\langle x,y\rangle) = h_C(u)+\max_{x\in L} t\langle x,y\rangle = h_C(u)+th_L(y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$, από τον ορισμό του L. Τότε,

$$\begin{aligned} h'_C(u;y) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{h_C(u+ty)-h_C(u)}{t} \geq \lim_{t\to 0^+} \frac{h_L(u+ty)-h_C(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{h_C(u)+th_L(y)-h_C(u)}{t} \\ &= h_L(y). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad h_L(y) \leq h'_C(u;y), \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$h'_C(u;y) = \lim_{t\to 0^+} \frac{h_C(u+ty)-h_C(u)}{t} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{h_C(u)+th_C(y)-h_C(u)}{t} = h_C(y).$$

Η συνάρτηση $g(y) = h'_C(u;y)$ είναι κυρτή και θετικά ομογενής. Συνεπώς, υπάρχει μη κενό, συμπαγές κυρτό $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε

$$h_M(y) = h'_C(u;y), \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Από την

$$h_M(y) = h'_C(u;y) \leq h_C(y)$$

(δείτε την Άσκηση 8(ii)) έπεται ότι $M \subseteq C$. Επιπλέον, αν $x \in M$ έχουμε

$$\langle x, u\rangle \leq h'_C(u;u) = h_C(u)$$

και

$$\langle x, -u\rangle \leq h'_C(u;-u) = -h_C(u),$$

δηλαδή

$$\langle x, u\rangle = h_C(u).$$

Έπεται ότι $M \subseteq L$. Αυτό δείχνει ότι

$$(**) \qquad h'_C(u;y) = h_M(y) \leq h_L(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ έπεται ότι $h'_C(u;y) = h_L(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

(β) Από την Άσκηση 10, το L είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν η h_L είναι γραμμική, δηλαδή αν και μόνο αν η $y \mapsto h'_C(u;y)$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Με την ορολογία της Άσκησης 11 παρατηρούμε τότε το εξής: αν η $h'_C(u;y)$ είναι γραμμική και αν $v \in \partial h_C(u)$ τότε $\langle v, y\rangle \leq h'_C(u;y)$ και $\langle v, -y\rangle \leq h'_C(u;-y) = -h'_C(u;y)$, δηλαδή

$$\langle v, y\rangle = h'_C(u;y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι το $\partial h_C(u)$ είναι μονοσύνολο: αν $\langle v, y\rangle = \langle v_1, y\rangle$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ τότε $v = v_1$. Πάλι από την Άσκηση 11, το $\partial h_C(u)$ είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν η h_C είναι διαφορίσιμη στο u. Άρα, αν η $h'_C(u;y)$ είναι γραμμική, τότε η h_C είναι διαφορίσιμη στο u. Το αντίστροφο ελέγχεται εύκολα: αν η h_C είναι διαφορίσιμη στο u τότε

$$h'_C(u;y) = \langle \nabla h_C(u), y\rangle,$$

δηλαδή η $h'_C(u;y)$ είναι γραμμική.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι το L είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν η $h'_C(u;y)$ είναι γραμμική, το οποίο με τη σειρά του συμβαίνει αν και μόνο αν η h_C είναι διαφορίσιμη στο u.

10. *Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.*

Υπόδειξη. Αν $C = \{x\}$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ τότε η συνάρτηση $h_C(y) = \langle x, y\rangle$ είναι προφανώς γραμμική.

Αντίστροφα, έστω ότι η h_C είναι γραμμική συνάρτηση. Τότε, υπάρχει $u \neq 0$ ώστε $h_C(y) = \langle u, y\rangle$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Έστω $x \in C$. Τότε,

$$\langle x, y\rangle \leq h_C(y) = \langle u, y\rangle$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας όπου y το $-y$ παίρνουμε

$$-\langle x, y\rangle = \langle x, -y\rangle \leq h_C(-y) = \langle u, -y\rangle = -\langle u, y\rangle,$$

άρα

$$\langle x, y\rangle = \langle u, y\rangle$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Αυτό μπορεί να ισχύει μόνο αν $x = u$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, για κάθε $x \in C$ ισχύει $x = u$, δηλαδή το $C = \{u\}$ είναι μονοσύνολο.

11. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το υποδιαφορικό της f στο x είναι το σύνολο*

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle \ \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

(α) Δείξτε ότι το $\partial f(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

(β) *Δείξτε ότι*

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u\rangle \leq f'(x; u) \text{ για κάθε } u \neq 0\},$$

όπου $f'(x;u)$ *είναι η παράγωγος της* f *στο σημείο* x *στην κατεύθυνση του* u.

(γ) *Δείξτε ότι: αν η* f *είναι διαφορίσιμη στο* x *τότε* $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Υπόδειξη. (α) Η f είναι κυρτή, άρα έχει τουλάχιστον ένα υπερεπίπεδο στήριξης στο x: υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Τότε, $v \in \partial f(x)$.

Έστω $v_1, v_2 \in \partial f(x)$ και έστω $t \in (0,1)$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$(1-t)f(y) \geq (1-t)f(x) + (1-t)\langle v_1, y - x\rangle$$

και

$$tf(y) \geq tf(x) + t\langle v_2, y - x\rangle.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$f(y) \geq f(x) + (1-t)\langle v_1, y - x\rangle + t\langle v_2, y - x\rangle = f(x) + \langle (1-t)v_1 + tv_2, y - x\rangle.$$

Έπεται ότι $(1-t)v_1 + tv_2 \in \partial f(x)$, άρα το $\partial f(x)$ είναι κυρτό.

Το $\partial f(x)$ είναι κλειστό: έστω $v_m \in \partial f(x)$ με $v_m \to v \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + \langle v_m, y - x\rangle,$$

και παίρνοντας όριο καθώς το $m \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle.$$

Αφού το y ήταν τυχόν, έπεται ότι $v \in \partial f(x)$.

Τέλος, δείχνουμε ότι το $\partial f(x)$ είναι φραγμένο. Η f είναι τοπικά Lipschitz στο x: ειδικότερα, υπάρχουν $M > 0$ και $\delta > 0$ ώστε $|f(z) - f(x)| \leq M\|z - x\|_2$ για κάθε $z \in B(x, \delta)$. Έστω $v \in \partial f(x)$, $v \neq 0$. Θέτοντας $y = x + t\frac{v}{\|v\|_2}$ στην $f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle$, παίρνουμε

$$t\|v\|_2 = \langle v, tv/\|v\|_2\rangle \leq f(x + tv/\|v\|_2) - f(x) \leq M\|x + tv/\|v\|_2 - x\|_2 = Mt,$$

δηλαδή $\|v\|_2 \leq M$. Αφού το $\partial f(x)$ είναι κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές.

(β) Έστω $v \in \partial f(x)$. Για κάθε $u \neq 0$ και $t > 0$ έχουμε

$$t\langle v, u\rangle = \langle v, x + tu - x\rangle \leq f(x + tu) - f(x),$$

συνεπώς

$$\langle v, u\rangle \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = f'(x; u).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\langle v, u\rangle \leq f'(x; u)$ για κάθε $u \neq 0$. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f(x + t(y - x))$. Παρατηρούμε ότι

$$g'(0) = f'(x; y - x) \geq \langle v, y - x\rangle.$$

Από το λήμμα των τριών χορδών βλέπουμε ότι $g(1) \geq g(0) + g'(0)(1-0)$, δηλαδή

$$f(y) \geq f(x) + g'(0) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle.$$

Αφού το y ήταν τυχόν, έπεται ότι $c \in \partial f(x)$.

(γ) Από το Θεώρημα 5.2.11 γνωρίζουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική αφινική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $\alpha(x) = f(x)$ και $f(y) \geq \alpha(y)$ για κάθε $y \in C$. Επιπλέον, $\alpha(x) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$. Συνεπώς, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν το $\nabla f(x)$ υπάρχει και είναι το μοναδικό στοιχείο του $\partial f(x)$.

12. *Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$.*

Υπόδειξη. Έχουμε $v \in \partial h_C(0)$ αν και μόνο αν, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$h_C(y) \geq h_C(0) + \langle v, y - 0 \rangle,$$

δηλαδή

$$(*) \qquad \langle v, y \rangle \leq h_C(y).$$

Αφού $h_C(y) = \max_{x \in C} \langle v, y \rangle$, είναι φανερό ότι κάθε $v \in C$ ικανοποιεί την $(*)$. Συνεπώς, $C \subseteq \partial h_C(0)$.

Ας υποθέσουμε ότι $v \notin C$. Τότε, μπορούμε να διαχωρίσουμε αυστηρά τα C και $\{v\}$. Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\langle v, y \rangle > \max_{x \in C} \langle x, y \rangle = h_C(y).$$

Τότε, $v \notin \partial h_C(0)$. Αυτό σημαίνει ότι $\partial h_C(0) \subseteq C$.