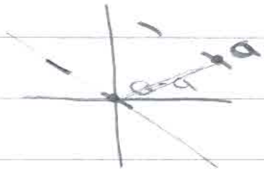
Θ. Σπασσάκου

Μ-9

Κυρτά Σύνολα

- Στοιχεία Αφφινικής (Affine) Γεωμετρίας:

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$, $A\neq\emptyset$, $a\in A$



$\langle A-a\rangle$

Αν $b\in A \Rightarrow \langle A-a\rangle=\langle A-b\rangle$

$A\subseteq a+\langle A-a\rangle$ ο δ.υπόχωρος $\langle A-a\rangle$ δεν εξαρτάται από το $a\in A$.

$\mathrm{aff}A = a+\langle A-a\rangle$ αφφινική θήκη του A

$\dim_a A=\dim_a(\mathrm{aff}A)=:\dim(\langle A-a\rangle)$.

Πρόταση: $\mathrm{aff}A=\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i\in A, \sum_{i=1}^n\lambda_i=1\}$

Απόδειξη:

Έστω $a_1\in A$ τότε $\mathrm{aff}A = a_1+\langle A-a_1\rangle = a_1+\{\sum_{i=2}^n\lambda_i(a_i-a_1), a_i\in A, \lambda_i\in\mathbb{R}\} = \{a_1(1-\sum_{i=2}^n\lambda_i)+\sum_{i=2}^n\lambda_i a_i, \lambda_i\in\mathbb{R}\} \overset{\lambda_1=1-\sum_{i=2}^n\lambda_i}{=}$
$\{\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i, \sum_{i=1}^n\lambda_i=1, a_i\in A$.

- Έστω $A=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι αφφινικά εξαρτημένο $\Leftrightarrow \exists x_i\in\mathrm{aff}(A\setminus\{x_i\})$

Πρόταση: Έστω $A=\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\mathbb{R}^d$ ΤΑΕΙ

(i) A αφφινικά εξαρτημένο

(ii) $\exists\lambda_i$ όχι όλα μηδέν, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=0$ και $\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i=0$

(iii) $\exists x_i\in A: \{x_j-x_i, j\neq i, j=1,\dots,n\}$ γρ. ανεξάρτητο.

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι $x_1\in\mathrm{aff}(A\setminus\{x_1\})$

$x_1=\sum_{i=2}^n\lambda_i x_i$, $x_i\neq x_1$, $\sum_{i=2}^n\lambda_i=1$

$(-1)x_1+\sum_{i=2}^n\lambda_i x_i=0$ για $\lambda_1=-1$ $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i=0$ και $\sum_{i=1}^n\lambda_i=0$.

Πρόταση:

(i) Έστω H δ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, $\dim H = \kappa \le d \Leftrightarrow$ $\exists \{x_1 = 0, x_2, \dots x_{\kappa+1}\}$ αφφινικά ανεξάρτητα και αν $\{y_1, \dots y_N\} \subseteq H$, $N \ge \kappa+2$ αφφινικά εξαρτημένα.

(ii) $\dim A = \kappa \le d \Leftrightarrow \exists \{a_1, \dots, a_{\kappa+1}\}$ αφφινικά ανεξάρτητα και $\{b_1 \dots b_N\} \subseteq A$, $N \ge \kappa+2$ αφφινικά εξαρτημένο.

Παρατηρήσεις:

Αν $\dim A = \kappa$, $x = \sum_{i=1}^{\kappa+1} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{\kappa+1} \lambda_i = 1$, $\{x_1 \dots x_\kappa\} \subseteq A$ αφφινικά ανεξάρτητα, λ_i μονοσήμαντως ορισμένα.

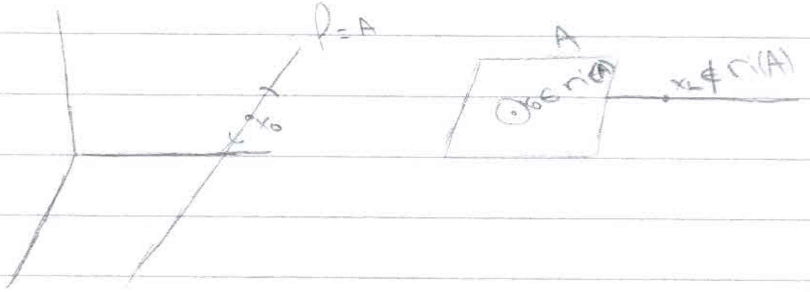
Υπενθύμιση:

$A \neq \emptyset$ $\operatorname{aff} A = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i : \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, x_i \in A, i = 1, \dots n\}$
$= a + \langle A - a \rangle$

$\dim A = \kappa \Leftrightarrow \dim \operatorname{aff} A = \dim \langle A - a \rangle = \kappa \Leftrightarrow$
$\exists x_0, x_1, \dots x_\kappa \in A$ αφφινικά ανεξάρτητα και αν $\{y_1 \dots y_N\}$ $\subseteq A$ $N \ge \kappa+2$ αφφινικά εξαρτημένα.

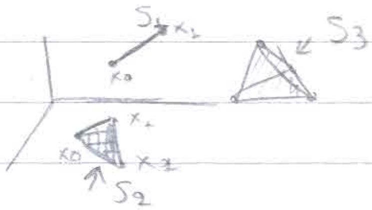
Ορισμός: Έστω $x_0 \in A$, $x_0 \in ri(A)$ (relative interior) $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : S(x_0, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} A \subseteq A$

$(\operatorname{aff} A, d_{\|\cdot\|})$ $d_{\|\cdot\|} = \|x - y\|$ $x, y \in \operatorname{aff} A$ μετρικός υπόχωρος του $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$.



κ-simplex στον $\mathbb{R}^d$, $\kappa=1,\dots,d$: Έστω $\{x_0,\dots x_k\}$ αφφινικά ανεξάρτητα $S=\mathrm{co}\{x_0,x_1\dots x_k\}$, $\dim S=k$

Παραδείγματα:



$k=1$ $\quad S_1=\mathrm{co}\{x_0,x_1\}$

$k=2$ $\quad S_2=\mathrm{co}\{x_0,x_1,x_2\}$

$k=3$ $\quad S_3=\mathrm{co}\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$

Λήμμα:

(i) Αν $A=\mathrm{co}\{e_0=0, e_1\dots e_k\}\subseteq\mathbb{R}^k$ τότε $\mathrm{ri}A=A^\circ\{\sum_{i=0}^k t_ie_i,$ $\sum_{i=1}^k t_i=1$, $t_i>0$

(ii) $S=\mathrm{co}\{x_0,x_1,\dots,x_k\}\subseteq\mathbb{R}^d$, k-simplex τότε $\mathrm{ri}\,S=\{\sum_{i=0}^k t_ix_i : \sum_{i=0}^k t_i=1, t_i>0\}$

Ιδιαιτέρως: $\bar{x}=\frac{1}{k+1}(x_0+\dots+x_k)\in\mathrm{ri}\,S$.

Απόδειξη:

(i) $A=\mathrm{co}\{e_0,\dots e_k\}=\{\sum_{i=1}^k t_ie_i : \sum_{i=0}^k t_i=1, t_i\geq 0\}=$
$\{\sum_{i=1}^k t_ie_i : \sum_{i=1}^k t_i\leq 1, t_i\geq 0\}=\{(t_1\dots t_k)\in\mathbb{R}^k: t_1+\dots+t_k\leq 1\}\cap$
$\{(t_1\dots t_k)\in\mathbb{R}^k : t_i\geq 0, i=1,\dots,k\}=B\cap\Gamma$

$A^\circ=B^\circ\cap\Gamma^\circ$

$A^\circ=\{(t_1,\dots t_k)\in\mathbb{R}^k : t_1+\dots+t_k<1\}\cap\{(t_1,\dots t_k)\in\mathbb{R}^k, t_i>0\}$
$=\{(t_1\dots t_k)\in\mathbb{R}^k : t_1+\dots+t_k<1, t_i>0, i=1,\dots,k\}$.

Άρα αν $t_0=1-\sum_{i=1}^k t_i>0$. $A^\circ=\{\sum_{i=0}^k t_ie_i : \sum_{i=0}^k t_i=1, t_i>0,$ $i=0,\dots,k\}$.

(ii) $\dim(\mathrm{aff}S)=k$ έστω $T:\mathbb{R}^k\to\mathrm{aff}S$, $T(\sum_{i=0}^k\lambda_ie_i)=\sum_{i=0}^k\lambda_ix_i$, $\sum\lambda_i=1$, επί, 1-1 συνεχής, T^{-1} συνεχής.

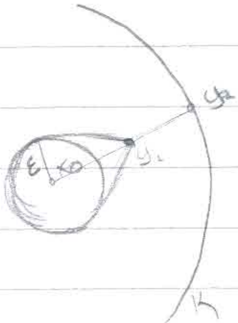
Τότε $T(A)=S$ (A: το σύνολο του (i))

$T(A^\circ)=\mathrm{ri}\,S=\{\sum_{i=0}^k t_ix_i, \sum_{i=0}^k t_i=1, t_i>0\}$

Πόρισμα: Αν $K\neq\emptyset$ κυρτό τότε $\mathrm{ri}\,K\neq\emptyset$

Απόδειξη:

Εστω οτι $\dim K = k$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ $\exists\, x_0, x_1, \dots, x_k \in K$
αφφινικα ανεξαρτητα $\Rightarrow \operatorname{aff} K = \operatorname{aff}\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$
$S = \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} K$
K κυρτο $S = \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_k\} \subseteq K$
$\emptyset \neq \operatorname{ri} S \subseteq \operatorname{ri} K$.



Πρόταση: Εστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, $x_0 \in \operatorname{ri}(K)$, $y \in \bar{K}$
τοτε $[x_0, y) \subseteq \operatorname{ri} K$

Αποδειξη:

Εστω χ.β.τ. $\dim K = d$, $x_0 \in K^\circ$ $\exists\, S(x_0, \varepsilon) \subseteq K$

• Εστω $y \in K$, K κυρτο, $\lambda \in (0,1)$ τοτε
$(1-\lambda) S(x_0, \varepsilon) + \lambda y \subseteq K$
$S((1-\lambda)x_0 + \lambda y, (1-\lambda)\varepsilon) \subseteq K \Rightarrow (1-\lambda)x_0 + \lambda y \in K^\circ$

• Εστω $y \in \bar{K} \setminus K^\circ$, $\lambda \in (0,1)$, $z_\lambda = (1-\lambda) x_0 + \lambda y$

$$\frac{a}{1-\lambda} = \frac{\varepsilon}{\lambda} \Rightarrow a = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\lambda}$$

Εστω $y' \in S\left(y, \frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon\right) \cap K$, $y \in \bar{K}$

$$y' = y + \frac{1-\lambda}{\lambda} v, \quad \|v\| < \varepsilon$$

$$z_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda y = (1-\lambda)(x_0 - v) + (1-\lambda)v + \lambda\left(y' - \frac{1-\lambda}{\lambda} v\right) =$$

$(1-\lambda)(x_0 - v) + \lambda y'$ οπου $x_0 - v \in S(x_0, \varepsilon) \subseteq K^\circ$, $y' \in K$

Αρα $z_\lambda \in K^\circ$

Θεωρημα Καραθεοδωρη: Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim A = k$
Τοτε $\operatorname{conv} A = \{ \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i : \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ x_i \in A$

Αποδειξη:

"$\supseteq$" ισχυει
"$\subseteq$" $x \in \operatorname{conv} A = \{ \sum_{i=1}^{m} t_i x_i : \sum t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ x_1 \dots x_m \in A,\ m \in \mathbb{N} \}$
Αν $m = k+1$ ✓

Εστω $m \geq k+2$, $x = \sum t_i x_i$, $\sum t_i = 1$, $t_i > 0$, $x_i \neq x_j, i \neq j$
$\{x_1, x_2, \dots x_m\} \subseteq A$ $\dim A = k$ αρα $\{x_1 \dots x_m\}$ αφ. εξαρτημένο. $\exists (\lambda_1 \dots \lambda_m) \neq (0, \dots 0)$: $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ και
$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$
Τα λ_i οχι όλα 0 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$
$\Delta = \{1, \dots m\}$ και $\Delta^+ = \{i \in \Delta : \lambda_i > 0\} \neq \emptyset$
$\Delta^- = \{i \in \Delta, \lambda_i \leq 0\} \neq \emptyset$
$\tau = \min\{\frac{t_i}{\lambda_i} : i \in \Delta^+\} > 0$, $\tau = \frac{t_{i_0}}{\lambda_{i_0}}$ για κάποιο $i_0 \in \Delta^+$

$\theta_i = t_i - \tau \lambda_i$, $i = 1 \dots m$
Εστω $i \in \Delta$ αν $i = i_0$ $\theta_{i_0} = 0$, αν $i \in \Delta^+$ $\theta_i \geq 0$
αν $i \in \Delta^-$ $\theta_i > 0$
και $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = \sum t_i - \tau \sum \lambda_i = 1$.
$\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i = \sum t_i x_i - \tau \sum \lambda_i x_i = \sum t_i x_i = x$.
Αρα το x είναι κυρτος συνδυασμός των
$\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_0\}$ το πολυ $(m-1)$ σημεια.
Εαν $m-1 \geq d+2$ επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μεχρι να φτάσει σε $d+1$ σημεια