Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 1

1. Αν K κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \ldots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.

2. Έστω $S = S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1\}$ η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(S)$ του S είναι η μοναδιαία σφαίρα $B_2(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq 1\}$.

3. Έστω $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι
$$\mathrm{conv}\{\pm\mathrm{e}_1, \ldots, \pm\mathrm{e}_d\} = B_1(0,1),$$
όπου $B_1(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq 1\}$.

4. Για μία συνάρτηση $f \colon K \to \mathbb{R}$, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^d$, το επιγράφημα της f ορίζεται ως $\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} \colon f(x) \leq t\}$. Δείξτε ότι το K είναι κυρτό σύνολο και η f κυρτή συνάρτηση ανν $\mathrm{epi}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$.

5. Έστω $f \colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν $x_0 \in K$ είναι τοπικό ελάχιστο της f, τότε είναι και ολικό ελάχιστο.

6. Έστω $f \colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν η f έχει μέγιστο στο K τότε είναι σταθερή.

7. Για $p \in (0, +\infty)$, ορίζουμε
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$
Επίσης ορίζουμε
$$\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i| \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$
(i) Δείξτε ότι για $p \in [1, +\infty]$, η $x \mapsto \|x\|_p$ είναι νόρμα.
(ii) Για $p \in [1, +\infty]$, οι μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\|_p \leq 1\}$ είναι κυρτά σύνολα.
(iii) Είναι οι $x \mapsto \|x\|_p$ νόρμες για $p \in (0,1)$;
[Υπόδειξη: Είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0,1)$ κυρτές για $p \in (0,1)$;]
(iv) Δείξτε ότι για $1 \leq p < q \leq +\infty$,
$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq d^{1/p - 1/q} \|x\|_q \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

8. (Η ανισότητα Hölder.)
(α) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα Riemann.) Αν $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες και ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις, και αν $p, q > 1$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$, τότε
$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

(β) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα ως προς κάποιο μέτρο.) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, και αν $p, q > 1$ ικανοποιούν την $p^{-1} + q^{-1} = 1$, τότε $\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$.

9. Η συνάρτηση Γ ορίζεται για $x > 0$ από την $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.
(i) Δείξτε ότι το $\Gamma(x)$ είναι καλά ορισμένο για $x > 0$.
(ii) $\Gamma(1) = 1$.
(iii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ για $n \in \mathbb{N}$.
(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ για $x > 0$.
(v) Η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλαδή η $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ είναι κυρτή.
[Υπόδειξη: Μία συνάρτηση $f\colon K \to (0, +\infty)$ είναι λογαριθμικά κυρτή ανν

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda} \qquad x, y \in K, \ \lambda \in [0,1].]$$

(vi) Η συνάρτηση Γ είναι κυρτή.