Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 2

1. Έστω K ανοικτό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f\colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $x \in K$ και $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι το σύνολο $I := \{t \in \mathbb{R}\colon x+tu \in K\}$ είναι κυρτό σύνολο, και η συνάρτηση $g(t) := f(x+tu)$, $t \in I$, κυρτή συνάρτηση.

2. Έστω K κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f\colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο στάθμης $F_r := \{x \in K\colon f(x) \le r\}$ είναι, για κάθε $r \in \mathbb{R}$, κυρτό (πιθανώς κενό). Δείξτε επίσης με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει· υπάρχει δηλαδή συνάρτηση f για την οποία το F_r είναι κυρτό για κάθε $r \in \mathbb{R}$, αλλά η f δεν είναι κυρτή.

3. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και μη κενό και $n \in \mathbb{N}$.

   (α) Δείξτε ότι αν $f\colon K \to [0,\infty)$ κυρτή, τότε $x \mapsto [f(x)]^n$ είναι κυρτή.

   (β) Δείξτε με (αντιπαράδειγμα) ότι το (α) δεν ισχύει εν γένει αν παραληφθεί η υπόθεση $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in K$.

4. Ένα κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^d$ με τουλάχιστον δύο σημεία λέγεται κυρτός κώνος με κορυφή την αρχή των αξόνων αν $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K\ \forall\, \lambda \in [0,\infty)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός· μία συνάρτηση $f\colon K \to \mathbb{R}$, ορισμένη σε έναν κυρτό κώνο K, λέγεται ομογενής βαθμού n αν $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ για κάθε $x \in K$ και $\lambda \ge 0$. Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή και ομογενής βαθμού n, και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η συνάρτηση $x \mapsto [f(x)]^{1/n}$ είναι κυρτή.

5. Δείξτε ότι μία συνεχής συνάρτηση $f\colon K \to \mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα μη κενό κυρτό $K \subseteq \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή ανν $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ για κάθε $x, y \in K$.
   (Σημείωση: αυτό δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας της f.)

6. (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.) Έστω $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ σημεία του $\mathbb{R}^2$, με τουλάχιστον δύο x_i διάφορα μεταξύ τους. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $y = ax+b$ ‘σε ελάχιστη απόσταση’ από τα σημεία $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$· δηλαδή δείξτε ότι η $\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i+b)]^2$ έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο ως προς a, b.

7. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f\colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή. Δείξτε ότι:

   (α) Για κάθε $x \in K$ και $u \in \mathbb{R}^d$, το όριο

   $$D_u^+ f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

   υπάρχει.

(β) Για $x \in K$ σταθερό, η συνάρτηση $G_x(u) := D_u^+ f(x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή και θετικά ομογενής (δηλαδή $G_x(\lambda u) = \lambda G_x(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda \geq 0$).

(γ) Για $x \in K$ σταθερό, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle$ $\forall\, u \in \mathbb{R}^d$.

(δ) Αν $\partial f(x)$ το υποδιαφορικό της f στο x, τότε

$$\partial f(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \colon D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \ \forall\, u \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

(ε) Δείξτε επίσης ότι $D_u^+ f(x) \geq D_u^- f(x)$, όπου $D^- f(x) := -D^+ f_{-u}(x)$, για κάθε $x \in K$. (Η κατά κατεύθυνση παράγωγος $D_u f(x)$ της f στο x υπάρχει όταν $D_u^+ f(x) = D_u^- f(x)$.)

8. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και ανοικτό, $f \colon K \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, και $x \in K$. Δείξτε ότι το υποδιαφορικό $\partial f(x)$ της f στο x είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

9. (α) Βρείτε το υποδιαφορικό $\partial f(0)$ της συνάρτησης $f(x) := \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$, στο 0.

   (β) Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) := \|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^d$.

   [Υπενθύμιση: $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$ για $x \in \mathbb{R}^d$ και $p > 0$, και $\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1,\dots,d\}} |x_i|$.]

10. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f \colon K \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι κυρτή ανν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \qquad \forall\, x, y \in K.$$