

Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 2

1. Έστω K ανοικτό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $x \in K$ και $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι το σύνολο $I := \{t \in \mathbb{R}: x + tu \in K\}$ είναι κυρτό σύνολο, και η συνάρτηση $g(t) := f(x + tu)$, $t \in I$, κυρτή συνάρτηση.

Λύση. Έστω $t, s \in I$ και $\lambda \in [0, 1]$. τότε $x + tu \in K$ και $x + su \in K$. Αφού όμως το K είναι κυρτό, πρέπει και $x + [\lambda t + (1 - \lambda)s]u = \lambda(x + tu) + (1 - \lambda)(x + su) \in K$. άρα το I είναι κυρτό. Επίσης

$$\begin{aligned} g(\lambda t + (1 - \lambda)s) &= f(x + [\lambda t + (1 - \lambda)s]u) \\ &= f(\lambda(x + tu) + (1 - \lambda)(x + su)) \leq \lambda f(x + tu) + (1 - \lambda)f(x + su) \\ &= \lambda g(t) + (1 - \lambda)g(s). \end{aligned}$$

άρα και η g είναι κυρτή.

2. Έστω K κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο στάθμης $F_r := \{x \in K: f(x) \leq r\}$ είναι, για κάθε $r \in \mathbb{R}$, κυρτό (πιθανώς κενό). Δείξτε επίσης με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχει δηλαδή συνάρτηση f για την οποία το F_r είναι κυρτό για κάθε $r \in \mathbb{R}$, αλλά η f δεν είναι κυρτή.

Λύση. Έστω $r \in \mathbb{R}$ και $x, y \in F_r$ (αν F_r μη κενό): τότε $f(x) \leq r$ και $f(y) \leq r$. Έστω επίσης $\lambda \in [0, 1]$. Τότε από την κυρτότητα του K έπεται ότι $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, και από την κυρτότητα της f ότι

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r,$$

επειδή και $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$: επομένως $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F_r$. Άρα το F_r είναι κυρτό σύνολο.

Έστω τώρα η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{για } x < 0 \\ 0 & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{για } x > 1. \end{cases}$$

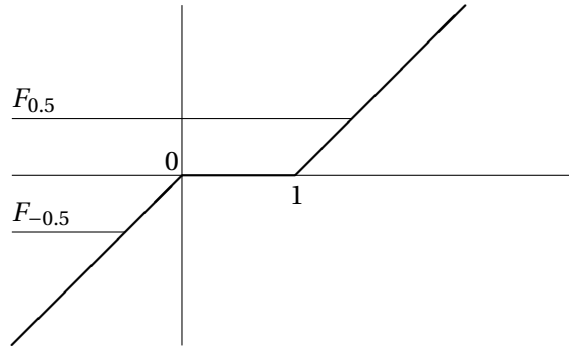
η f προφανώς δεν είναι κυρτή συνάρτηση: για παράδειγμα,

$$f(0) = 0 > \frac{1}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{2}.$$

Από την άλλη, τα σύνολα στάθμης F_r της f είναι τα

$$F_r = \begin{cases} (-\infty, r] & \text{αν } r < 0 \\ (-\infty, 1] & \text{αν } 0 \leq r \leq 1 \\ (-\infty, r + 1] & \text{αν } r > 0, \end{cases}$$

που είναι φυσικά κυρτά σύνολα για όλα τα $r \in \mathbb{R}$.



3. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και μη κενό και $n \in \mathbb{N}$.

- (α) Δείξτε ότι αν $f: K \rightarrow [0, \infty)$ κυρτή, τότε $x \mapsto [f(x)]^n$ είναι κυρτή.
 (β) Δείξτε με (αντιπαράδειγμα) ότι το (α) δεν ισχύει εν γένει αν παραληφθεί η υπόθεση $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in K$.

Λύση. (α) **Λήμμα:** Αν $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και μη κενό, και $g: f(K) \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και αύξουσα (μη φθίνουσα), τότε $g \circ f$ είναι κυρτή.

Απόδειξη: Έστω $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

από την κυρτότητα της f , και τότε

$$g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y)),$$

η πρώτη ανισότητα από την μονοτονία της g και η δεύτερη από την κυρτότητα της g . $\square$

Για την Άσκηση τώρα παίρνει κανείς $g(x) := x^n$, $x \in [0, \infty)$, η οποία είναι φυσικά αύξουσα και κυρτή όταν $n \geq 1$: $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ και $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$, για $x > 0$.

(β) η $f(x) := -\ln x$, $x > 0$, είναι κυρτή: $f''(x) = x^{-2} > 0$ · όμως η $g(x) := (-\ln x)^2$, $x > 0$, έχει $g''(x) = 2(1 - \ln x)/x^2$, η οποία αλλάζει πρόσημο στο $x = e$ και άρα η g δεν είναι κυρτή.

4. Ένα κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^d$ με τουλάχιστον δύο σημεία λέγεται κυρτός κώνος με κορυφή την αρχή των αξόνων αν $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K \ \forall \lambda \in [0, \infty)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός· μία συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένη σε έναν κυρτό κώνο K , λέγεται ομογενής βαθμού n αν $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ για κάθε $x \in K$ και $\lambda \geq 0$. Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή και ομογενής βαθμού n , και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η συνάρτηση $x \mapsto [f(x)]^{1/n}$ είναι κυρτή.

Λύση. Η λύση αυτή είναι αυτή που παρουσίασε ο κ. Κ. Καββαδίας και μοιάζει να είναι η «φυσιολογική λύση» αυτής της Άσκησης.

Έστω $x, y \in [0, 1]$ και $\lambda \in [0, 1]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & [f(\lambda x + (1 - \lambda)y)]^{1/n} \leq \lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n} \\ \Leftrightarrow & f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n})^n. \\ \Leftrightarrow & \frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{(\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n})^n} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & f\left(\frac{\lambda x + (1 - \lambda)y}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}}\right) \leq 1, \end{aligned}$$

η τελευταία σειρά από την ομογένεια της f . Τώρα για να χρησιμοποιήσουμε και την κυρτότητα της f , χρειαζόμαστε κυρτό συνδυασμό των x και y · γράφουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda x + (1 - \lambda)y}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}} \\ &= \frac{\lambda[f(x)]^{1/n}}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}} \frac{x}{[f(x)]^{1/n}} + \frac{(1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}} \frac{y}{[f(y)]^{1/n}} \\ &= \mu x' + (1 - \mu)y', \end{aligned}$$

όπου

$$\mu := \frac{\lambda[f(x)]^{1/n}}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}}, \quad x' := \frac{x}{[f(x)]^{1/n}} \quad \text{και} \quad y' := \frac{y}{[f(y)]^{1/n}}.$$

Από την κυρτότητα της f παίρνουμε ότι

$$f\left(\frac{\lambda x + (1 - \lambda)y}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}}\right) = f(\mu x' + (1 - \mu)y') \leq \mu f(x') + (1 - \mu)f(y').$$

από την ομογένεια της f και πάλι

$$f(x') = f\left(\frac{x}{[f(x)]^{1/n}}\right) = 1 \quad \text{και} \quad f(y') = f\left(\frac{y}{[f(y)]^{1/n}}\right) = 1,$$

οπότε τελικά πράγματι έχουμε ότι

$$f\left(\frac{\lambda x + (1 - \lambda)y}{\lambda[f(x)]^{1/n} + (1 - \lambda)[f(y)]^{1/n}}\right) \leq \mu + (1 - \mu) = 1.$$

5. Δείξτε ότι μία συνεχής συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα μη κενό κυρτό $K \subseteq \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή αν $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ για κάθε $x, y \in K$.
(Σημείωση: αυτό δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας της f .)

Λύση. Προφανώς όταν η f είναι κυρτή, η ανισότητα

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

αφού ισχύει για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει και για $\lambda = \frac{1}{2}$, για κάθε $x, y \in K$.

Αντίστροφα, έστω ότι

$$(1) \quad f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \quad \forall x, y \in K.$$

ο ισχυρισμός τότε είναι ότι η ανισότητα

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

ισχύει και για κάθε $\lambda = k2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Πράγματι, αυτό μπορεί να δειχθεί με επαγωγή στο n . Η υπόθεση της Άσκησης μας δίνει ότι ισχύει για $n = 1$, για κάθε $x, y \in K$. Έστω τώρα ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και όλα τα $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, και όλα τα $x, y \in K$. Τότε, για $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1}\}$, έχει κανείς ότι

$$(2a) \quad \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y \right] + \frac{1}{2}y,$$

και επίσης

$$(2b) \quad \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y = \frac{1}{2} \left[\frac{k-2^n}{2^n}x + \left(1 - \frac{k-2^n}{2^n}\right)y \right] + \frac{1}{2}x.$$

αν $k \leq 2^n$, τότε έχει κανείς από την πρώτη από αυτές τις ισότητες ότι

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}f(y) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y) \right] + \frac{1}{2}f(y) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y), \end{aligned}$$

η πρώτη ανισότητα από την (1) και η δεύτερη από την επαγωγική υπόθεση· αν πάλι $k > 2^n$, τότε $k - 2^n \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, και η (2b), μαζί με την (1) και την επαγωγική υπόθεση πάλι, δίνουν όμοια ότι

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k-2^n}{2^n}x + \left(1 - \frac{k-2^n}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}f(x) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{k-2^n}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k-2^n}{2^n}\right)f(y) \right] + \frac{1}{2}f(x) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Έστω τώρα αυθαίρετο $\lambda \in (0, 1)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω k_n εκείνος ο ακέραιος στο $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ για τον οποίο $k_n 2^{-n} \leq \lambda < (k_n + 1)2^{-n}$. τέτοιος ακέραιος υπάρχει

και είναι μοναδικός γιατί τα διαστήματα $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ διαμερίζουν το $[0, 1)$. Τότε $k_n 2^{-n} \rightarrow \lambda$ καθώς $n \rightarrow \infty$ διότι

$$0 \leq \lambda - \frac{k_n}{2^n} \leq \frac{k_n + 1}{2^n} - \frac{k_n}{2^n} = 2^{-n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

Από την συνέχεια της f και τον ισχυρισμό έπεται τώρα ότι

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{k_n}{2^n}x + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)y\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{k_n}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)f(y)\right] = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \end{aligned}$$

για δοθέντα, αλλά αυθαίρετα $x, y \in K$. Άρα η f είναι κυρτή.

6. (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.) Έστω $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ σημεία του $\mathbb{R}^2$, με τουλάχιστον δύο x_i διάφορα μεταξύ τους. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $y = ax + b$ «σε ελάχιστη απόσταση» από τα σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. δηλαδή δείξτε ότι η $\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$ έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο ως προς a, b .

Λύση. Έστω

$$Q(a, b) := \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Αν η Q έχει ελάχιστο σε κάποιο σημείο (a, b) , τότε πρέπει $\nabla Q(a, b) = 0$. Υπολογίζει κανείς

$$\nabla Q(a, b) = \begin{bmatrix} (\partial/\partial a)Q(a, b) \\ (\partial/\partial b)Q(a, b) \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \end{bmatrix},$$

και βλέπει εύκολα ότι $\nabla Q(a, b) = 0$ αν

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{aligned}$$

εισάγοντας τους συμβολισμούς $\bar{x} := n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ και $\bar{y} := n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$, αυτά μπορούν να γραφούν και ως

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ b &= \bar{y} - \bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \frac{\partial^2 Q}{\partial b \partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i & \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} &= 2n. \end{aligned}$$

δηλαδή η Εσσιανή της Q σε ένα σημείο (a, b) είναι

$$HQ(a, b) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός είναι θετικά ορισμένος αφού το $(1, 1)$ στοιχείο του $2\sum_{i=1}^n x_i^2$ είναι (γνήσια) θετικό, δηλ. $2\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ (δεν είναι όλα τα x_i ίδια άρα δεν είναι όλα μηδέν), και το ίδιο και η ορίζουσά του:

$$\det(HQ(a, b)) = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0.$$

το > 0 προκύπτει από το γεγονός ότι δεν είναι όλα τα x_i ίδια. Έπεται από αυτό κατ' αρχήν ότι η Q έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (a, b) στο οποίο $\nabla Q(a, b) = 0$, επειδή η εσσιανή σε αυτό το σημείο είναι θετικά ορισμένη (Απειροστικός Λογισμός III), και κατόπιν, επειδή η εσσιανή είναι θετικά ορισμένη παντού, ότι η Q είναι γνήσια κυρτή συνάρτηση και επομένως έχει μοναδικό ελάχιστο.

7. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $x \in K$ και $u \in \mathbb{R}^d$, το όριο

$$D_u^+ f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

υπάρχει.

(β) Για $x \in K$ σταθερό, η συνάρτηση $G_x(u) := D_u^+ f(x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή και θετικά ομογενής (δηλαδή $G_x(\lambda u) = \lambda G_x(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda \geq 0$).

(γ) Για $x \in K$ σταθερό, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \forall u \in \mathbb{R}^d$.

(δ) Αν $\partial f(x)$ το υποδιαφορικό της f στο x , τότε

$$\partial f(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d : D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \forall u \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

(ε) Δείξτε επίσης ότι $D_u^+ f(x) \geq D_u^- f(x)$, όπου $D^- f(x) := -D^+ f_{-u}(x)$, για κάθε $x \in K$. (Η κατά κατεύθυνση παράγωγος $D_u f(x)$ της f στο x υπάρχει όταν $D_u^+ f(x) = D_u^- f(x)$.)

Λύση. (α) Έστω $g(t) := f(x + tu)$, $t \in \{s \in \mathbb{R} : x + su \in K\} =: I$. Αυτή είναι η συνάρτηση της Άσκησης 1 και επομένως είναι κυρτή. Άρα η δεξιά πλευρική παράγωγός της στο $0 \in I$ υπάρχει και αυτό σημαίνει ότι το

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'_+(0)$$

υπάρχει, και μάλιστα

$$(3) \quad \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t} \geq g'_+(x) = D_u^+ f(x)$$

για κάθε $t > 0$ και τέτοιο ώστε $x+tu \in K$. το γεγονός ότι $0 \in I$ είναι συνέπεια του ότι $x \in K$ και το γεγονός ότι το I είναι μη τετριμμένο ανοικτό διάστημα έπεται από το γεγονός ότι το K είναι ανοικτό. Υπενθυμίζεται ότι η ύπαρξη του παραπάνω ορίου για την κυρτή συνάρτηση g (μίας μεταβλητής), καθώς επίσης και η (3), οφείλονται στο γεγονός ότι η συνάρτηση

$$t \mapsto \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0}$$

είναι αύξουσα στο σύνολο $I \setminus \{0\}$, το οποίο με την σειρά του είναι συνέπεια του Λήμματος των τριών χορδών.

Σημειώνεται ακόμη ότι αν $u = 0$, τότε η συνάρτηση g είναι η σταθερή συνάρτηση $g(t) = f(x) \forall t \in \mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$ σ' αυτήν την περίπτωση). επομένως $D_0^+ f(x) = g'_+(0) = 0$ για κάθε x .

(β) Από τον ορισμό της $G_x(u)$, έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned} G_x(\lambda u) &= D_{\lambda u}^+ f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t\lambda u) - f(x)}{t} = \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t\lambda u) - f(x)}{t\lambda} \\ &= \lambda \lim_{s \downarrow 0} \frac{f(x + su) - f(x)}{s} = \lambda D_u^+ f(x) = \lambda G_x(u), \end{aligned}$$

και εφόσον βέβαια $\lambda > 0$ (ώστε $s = \lambda t \downarrow 0$ όταν $t \downarrow 0$), και άρα η G_x είναι θετικά ομογενής. Επίσης, για $u, v \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} G_x(\lambda u + (1-\lambda)v) &= D_{\lambda u + (1-\lambda)v}^+ f(x) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t[\lambda u + (1-\lambda)v]) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\lambda(x+tu) + (1-\lambda)(x+tv)) - f(x)}{t} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{\lambda f(x+tu) + (1-\lambda)f(x+tv) - f(x)}{t} \\ &= \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t\lambda u) - f(x)}{t} + (1-\lambda) \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t\lambda v) - f(x)}{t} \\ &= \lambda D_u^+ f(x) + (1-\lambda) D_v^+ f(x) \\ &= \lambda G_x(u) + (1-\lambda) G_x(v), \end{aligned}$$

η ανισότητα από την κυρτότητα της f και το γεγονός ότι $t > 0$. Επομένως η $u \mapsto G_x(u)$ είναι και κυρτή.

(γ) Αφού η $u \mapsto G_x(u)$ είναι κυρτή, έχει σε κάθε σημείο $u \in \mathbb{R}^d$, άρα και στο $u = 0$, υπερεπίπεδο στήριξης: υπάρχει δηλαδή $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε

$$G_x(u) \geq \langle v, u \rangle + G_x(0) = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Άρα $D_u^+ f(x) = G_x(u) \geq \langle v, u \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$.

(δ) Εξ ορισμού,

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^d : f(y) \geq \langle v, y - x \rangle + f(x) \quad \forall y \in K \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^d : f(y) - f(x) \geq \langle v, y - x \rangle \quad \forall y \in K \right\}. \end{aligned}$$

έστω επίσης

$$F(x) := \left\{ v \in \mathbb{R}^d : D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Έστω τώρα $v \in \partial f(x)$ και $u \in \mathbb{R}^d$. Τότε

$$f(x + tu) - f(x) \geq \langle v, (x + tu) - x \rangle = t \langle v, u \rangle$$

για κάθε t τέτοιο ώστε $x + tu \in K$, και αν επιπλέον $t > 0$, έχει κανείς ότι

$$\frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \geq \langle v, u \rangle$$

για κάθε $t > 0$ και τέτοιο ώστε $x + tu \in K$. αφήνοντας το $t \downarrow 0$ παίρνει κανείς ότι

$$D_u^+ f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \geq \langle v, u \rangle.$$

Αφού το u ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι $v \in F(x)$. Αυτό δείχνει ότι $\partial f(x) \subseteq F(x)$.

Αντίστροφα, έστω τώρα $v \in F(x)$ και $y \in K$. Τότε $D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ και άρα και για $u := y - x$. Από την (3) έχει όμως κανείς ότι

$$\frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \geq D_u^+ f(x)$$

για κάθε $t > 0$ και τέτοιο ώστε $x + tu \in K$, όποτε, για $t = 1$ παίρνει κανείς ότι

$$f(y) - f(x) = f(x + u) - f(x) \geq D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle = \langle v, y - x \rangle.$$

επιτρέπεται να πάρει κανείς $t = 1$ γιατί $1 > 0$ και $x + 1u = y \in K$. Αφού η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $y \in K$, έπεται ότι $v \in \partial f(x)$. Αυτό δείχνει τον αντίστροφο εγκλεισμό $F(x) \subseteq \partial f(x)$ και άρα πρέπει $F(x) = \partial f(x)$.

(ε) Έστω πάλι $g(t) := f(x + tu)$, $t \in \{s \in \mathbb{R} : x + su \in K\} =: I$ η συνάρτηση της Άσκησης 1· όπως παρατηρήθηκε στο (α), $0 \in I$ και το I είναι μη τετριμμένο ανοικτό διάστημα. Επίσης $D_u^+ f(x) = g'_+(0)$. Η g είναι κυρτή συνάρτηση μίας μεταβλητής και άρα $g'_-(0) \leq g'_+(0)$. Όμως

$$\begin{aligned} D_u^- f(x) &= -D_{-u}^+ f(x) = -\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t(-u)) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + (-t)u) - f(x)}{(-t)} \\ &= \lim_{s \uparrow 0} \frac{f(x + su) - f(x)}{s} \\ &= \lim_{s \uparrow 0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = g'_-(0) \leq g'_+(0) = D_u^+ f(x). \end{aligned}$$

8. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και ανοικτό, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, και $x \in K$. Δείξτε ότι το υποδιαφορικό $\partial f(x)$ της f στο x είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Λύση. Έστω $x \in K$. Το ότι $\partial f(x) \neq \emptyset$ είναι Θεώρημα που έχει αποδειχθεί στο μάθημα. Το ότι το υποδιαφορικό είναι κυρτό έπεται άμεσα: αν $u, v \in \partial f(x)$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε $f(y) \geq \langle u, y - x \rangle + f(x)$ για κάθε $y \in K$ και $f(y) \geq \langle v, y - x \rangle + f(x)$ για κάθε $y \in K$, και άρα

$$\begin{aligned} f(y) &= \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(y) \\ &\geq \lambda[\langle u, y - x \rangle + f(x)] + (1 - \lambda)[\langle v, y - x \rangle + f(x)] \\ &= \langle \lambda u + (1 - \lambda)v, y - x \rangle + f(x) \end{aligned}$$

για κάθε $y \in K$, επειδή $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$ και επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμική συνάρτηση ως προς κάθε μεταβλητή (εδώ φυσικά χρησιμοποιήθηκε μόνο η γραμμικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή). Έπεται ότι $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \partial f(x)$. Άρα το $\partial f(x)$ είναι κυρτό.

Θα αποδειχθεί τώρα ότι το $\partial f(x)$ είναι φραγμένο. Κατ' αρχήν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η κλειστή σφαίρα $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d: \|y - x\| \leq r\}$ να περιέχεται στο K . Η f είναι συνεχής και άρα φραγμένη στο συμπαγές $B(x, r)$. Έστω M ένα φράγμα: $|f(y)| \leq M \quad \forall y \in B(x, r)$. Έστω τώρα $v \in \partial f(x)$. χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v \neq 0$ (αφού αν το $\partial f(x) \setminus \{0\}$ είναι φραγμένο, τότε και το $\partial f(x)$ είναι επίσης φραγμένο). Το

$$I := \{t \in \mathbb{R}: x + tv \in K\}$$

είναι μη τετριμμένο ανοικτό διάστημα και πρέπει

$$(4) \quad f(x + tv) - f(x) \geq t\|v\|^2$$

για κάθε $t \in I$, επειδή $v \in \partial f(x)$ και $y = x + tv \in K$. Το I περιέχει το $t = r/\|v\|$, επειδή $x + tv \in B(x, r) \subseteq K$ για αυτό το t , αφού

$$\left\| \left(x + \frac{r}{\|v\|} v \right) - x \right\| = r.$$

επιπλέον, αφού $x \in B(x, r)$ και $x + tv \in B(x, r)$ για αυτό το t , έχει κανείς ότι $|f(x + tv)| \leq M$ και $|f(x)| \leq M$, και άρα

$$(5) \quad f(x + tv) - f(x) \leq |f(x + tv) - f(x)| \leq |f(x + tv)| + |f(x)| \leq 2M.$$

Από τις (4) και (5) έπεται τώρα ότι

$$r\|v\| = t\|v\|^2 \leq 2M.$$

Αυτό δείχνει ότι το $\partial f(x)$ φράσσεται από το $2M/r$.

Τέλος, θα δειχθεί ότι το υποδιαφορικό $\partial f(x)$ είναι και κλειστό, οπότε θα είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο). Έστω $v_n \in \partial f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, και έστω ότι $v_n \rightarrow v$ καθώς $n \rightarrow \infty$, για κάποιο $v \in \mathbb{R}^d$. Έστω $y \in K$. Τότε

$$f(y) - f(x) \geq \langle v_n, y - x \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και άρα

$$(6) \quad f(y) - f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, y - x \rangle = \langle v, y - x \rangle,$$

η ισότητα στο τέλος επειδή

$$|\langle v_n, y - x \rangle - \langle v, y - x \rangle| = |\langle v_n - v, y - x \rangle| \leq \|v_n - v\| \|y - x\| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0,$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwartz και την σύγκλιση $v_n \rightarrow v$. Αφού το $y \in K$ ήταν αυθαίρετο, η (6) δείχνει ότι $v \in \partial f(x)$. Αυτό τώρα δείχνει ότι το $\partial f(x)$ είναι κλειστό.

9. (α) Βρείτε το υποδιαφορικό $\partial f(0)$ της συνάρτησης $f(x) := \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$, στο 0.

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) := \|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^d$.

[Υπενθύμιση: $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^d |x_i|^p)^{1/p}$ για $x \in \mathbb{R}^d$ και $p > 0$, και $\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|$.]

Λύση. (α) Από τον ορισμό έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq \langle u, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \geq \langle u, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \right\}. \end{aligned}$$

Έστω $u \in B_2(0, 1) = \{v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_2 \leq 1\}$. τότε

$$\langle u, x \rangle \leq \|u\|_2 \|x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και άρα $u \in \partial f(0)$. Αντίστροφα, αν $u \in \partial f(0)$, τότε πρέπει, για $x = u$,

$$\|u\|_2 \geq \langle u, u \rangle = \|u\|_2^2,$$

και άρα πρέπει $\|u\|_2 \leq 1$. Αυτό δείχνει ότι $\partial f(0) = B_2(0, 1)$ τελικά.

(β) Από τον ορισμό πάλι έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq \langle u, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \geq \langle u, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \right\}. \end{aligned}$$

Έστω $u \in B_\infty(0, 1) = \{v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_\infty \leq 1\}$, όπου $\|u\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |u_i|$. τότε

$$\langle u, x \rangle = \sum_{i=1}^d u_i x_i \leq \left| \sum_{i=1}^d u_i x_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| |u_i| \leq \|u\|_\infty \|x\|_1 = \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

(αυτή βασικά είναι η ανισότητα Hölder για $p = 1$, $q = \infty$), και άρα $u \in \partial f(0)$. Αντίστροφα, αν $u \in \partial f(0)$, τότε πρέπει

$$(7a) \quad \langle u, e_i \rangle \leq \|e_i\|_1 = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

και

$$(7b) \quad \langle u, -e_i \rangle \leq \|-e_i\|_1 = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

όπου $e_1, \dots, e_d$ τα διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^d$. Όμως $\langle u, e_i \rangle = u_i$, η i συντεταγμένη του u . άρα οι (7a)–(7b) δείχνουν ότι $|u_i| \leq 1$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$ και άρα ότι $u \in B_\infty(0, 1)$. Επομένως $\partial f(0) = B_\infty(0, 1)$ τελικά.

10. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι κυρτή αν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K.$$

Λύση. Έστω πρώτα ότι η f είναι κυρτή και έστω $x, y \in K$. Αφού η f είναι διαφορίσιμη έχει ακριβώς ένα υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε σημείο του K , και αυτό ισχύει συγκεκριμένα για τα σημεία x και y του K . έχει συγκεκριμένα κανείς ότι

$$f(z) \geq \langle \nabla f(x), z - x \rangle + f(x) \quad \forall z \in K$$

και

$$f(z) \geq \langle \nabla f(y), z - y \rangle + f(y) \quad \forall z \in K.$$

Θεωρώντας αυτές τις ανισότητες για $z = y$ και $z = x$, αντίστοιχα, παίρνει κανείς ότι

$$f(y) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + f(x) \quad \forall x, y \in K$$

και

$$f(x) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle + f(y) \quad \forall x, y \in K,$$

και προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις δύο ανισότητες προκύπτει η ζητούμενη $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι ξέρει κανείς ότι,

$$(8) \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K.$$

Έστω $x, y \in K$ και έστω πάλι η συνάρτηση μίας μεταβλητής

$$g(t) := f(x + t(y - x))$$

ορισμένη για $t \in \{s \in \mathbb{R}: x + s(y - x) \in K\} =: I$. Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή και έχει παράγωγο

$$(9) \quad g'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle.$$

αυτό είναι συνέπεια του κανόνα της αλυσίδας αλλά αποδείχθηκε και στο μάθημα. Υπενθυμίζεται η απόδειξη:

$$\begin{aligned} & \frac{g(s+t) - g(t)}{s} - \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle \\ &= \frac{f(x + (t+s)(y-x)) - f(x + t(y-x)) - \langle \nabla f(x + t(y-x)), s(y-x) \rangle}{s} \xrightarrow{(s \rightarrow 0)} 0, \end{aligned}$$

αφού

$$\frac{f(x + (t+s)(y-x)) - f(x + t(y-x)) - \langle \nabla f(x + t(y-x)), s(y-x) \rangle}{|s|\|y-x\|} \xrightarrow{(s \rightarrow 0)} 0,$$

από τον ορισμό της διαφορισμότητας της f στο $x + t(y-x)$. Από τις (8) και (9) έπεται ότι αν $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} g'(t_2) - g'(t_1) &= \langle \nabla f(x + t_2(y-x)) - \nabla f(x + t_1(y-x)), y-x \rangle \\ &= \frac{\langle \nabla f(x + t_2(y-x)) - \nabla f(x + t_1(y-x)), (t_2 - t_1)(y-x) \rangle}{t_2 - t_1} \geq 0, \end{aligned}$$

και άρα η g' είναι αύξουσα και επομένως η g κυρτή. Έπεται ότι, αν $t \in [0, 1]$, τότε

$$g(t) = g((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1) \leq (1-t)g(0) + tg(1),$$

που σημαίνει ότι

$$f((1-t)x + ty) = g(t) \leq (1-t)g(0) + tg(1) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Αφού τα $x, y \in K$ και $t \in [0, 1]$ ήταν αυθαίρετα, έπεται ότι η f είναι κυρτή.