Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 3

1. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι κάθε
$$x \in \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$$
γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των x_i, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Δείξτε ότι τότε τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

2. (α) Έστω A μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(A)$ είναι επίσης ανοικτό.
(β) Δώστε παράδειγμα κλειστού συνόλου στον $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο.

3. (α) Έστω S μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.
(β) Έστω S_1 και S_2 μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι
$$\mathrm{conv}(S_1 + S_2) = \mathrm{conv}(S_1) + \mathrm{conv}(S_2).$$
(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\mathrm{conv}(S^{\mathrm{o}}) \subseteq (\mathrm{conv}(S))^{\mathrm{o}}$, όπου A^{o} συμβολίζει το εσωτερικό του A για ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ισχύει πάντα ισότητα;
[Υπόδειξη: αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, τότε και $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_i \mu_j) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^m \mu_j\right) = 1 \cdot 1 = 1$.]

4. Έστω $\delta > 0$, $m, d \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant d + 1$, και $K_1, \dots, K_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, με την ιδιότητα ότι για κάθε οικογένεια $d + 1$ από τα K_i, δηλαδή για κάθε $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{d+1} \leqslant m$, υπάρχει σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από κάθε K_{i_j} είναι $\leqslant \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_{i_j}) \leqslant \delta$ για κάθε $j \in \{1, \dots, d + 1\}$. Δείξτε ότι τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από όλα τα K_i είναι $\leqslant \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_i) \leqslant \delta$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$.

5. (α) Έστω K μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $x \in \mathrm{ri}(K)$ ανν για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$ υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1 - \mu) y \in K$.
(β) Δείξτε ότι αν $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$ και $S := \mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ το αντίστοιχο k-simplex, τότε
$$\mathrm{ri}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0, 1),\ \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}.$$

6. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό και κυρτό. Δείξτε ότι:
(α) $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{aff}(\bar{K}) = \mathrm{aff}(\mathrm{ri}(K))$·
(β) $\mathrm{ri}(K) = \mathrm{ri}(\bar{K}) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(K)$·
(γ) $\mathrm{rb}(K) = \mathrm{rb}(\bar{K}) = \mathrm{rb}(\mathrm{ri}(K))$.

7. (α) Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2) \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\mathrm{ri}(K_1 \cap K_2) = \mathrm{ri}(K_1) \cap \mathrm{ri}(K_2)$.
(β) Έστω K_i, $i \in I$, οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\bigcap_{i \in I} \mathrm{ri}(K_i) \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$.

8. Έστω $S = \operatorname{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\})$ ένα d-simplex στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $y \in S^{\mathrm{o}}$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \operatorname{conv}\big([\{x_0, x_1, \dots, \dots, x_d\} \smallsetminus \{x_i\}] \cup \{y\}\big) \qquad i \in \{1, \dots, d\},$$

είναι d-simplices, έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και $S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_d$.

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, μη κενό. Δείξτε ότι

$$\overline{\operatorname{conv}(S)} = \bigcap \Big\{ K \subseteq \mathbb{R}^d \colon K \supseteq S,\ K \text{ κλειστό και κυρτό} \Big\}.$$

10. (α) Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

ένα πολυώνυμο, με $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Δείξτε ότι οι ρίζες της παραγώγου P' του P περιέχονται στην κυρτή θήκη των ριζών του P.
(β) Έστω $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, και έστω $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του P. Δείξτε ότι η διάμετρος του συνόλου $\{z_1, \dots, z_4\}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\operatorname{diam}\big(\{z_1, \dots, z_4\}\big) \geqslant \sqrt{\left| \frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} \right|}.$$

[Υπόδειξη: Αν $z_1, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του P στο (α), το P γράφεται σαν $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $1/\bar{z} = z/|z|^2$ για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z.]