

Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 3

1. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι κάθε

$$x \in \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$$

γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των x_i , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Δείξτε ότι τότε τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

Λύση. Έστω $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$$

και

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0,$$

και έστω ότι τα λ_i δεν είναι όλα μηδέν. Έστω

$$I^+ := \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : \lambda_i > 0\} \quad \text{και} \quad I^- := \{i \in \{0, 1, \dots, n\} : \lambda_i < 0\}.$$

τότε πρέπει $I^+ \neq \emptyset$ και $I^- \neq \emptyset$ λόγω της (1) και του γεγονότος ότι δεν είναι όλα τα λ_i μηδέν. Από την (1) έχει κανείς ότι

$$0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{i \in I^+} \lambda_i + \sum_{i \in I^-} \lambda_i,$$

οπότε και

$$\sum_{i \in I^+} \lambda_i = - \sum_{i \in I^-} \lambda_i = \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i),$$

και επιπλέον

$$\lambda := \sum_{i \in I^+} \lambda_i > 0,$$

επειδή $I^+ \neq \emptyset$. Από την (2), τώρα, έχει κανείς ότι

$$\sum_{i \in I^+} \lambda_i x_i = - \sum_{i \in I^-} \lambda_i x_i,$$

και διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\lambda > 0$ ότι

$$(3) \quad \sum_{i \in I^+} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i \in I^-} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i,$$

με

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0 \quad \forall i \in I^+ \quad \text{και} \quad \frac{-\lambda_i}{\lambda} \geq 0 \quad \forall i \in I^-,$$

και

$$\sum_{i \in I^+} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i \in I^-} \frac{-\lambda_i}{\lambda} = \sum_{i \in I^+} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1.$$

Επομένως το δεξιό και αριστερό μέλος της (3) αποτελούν και τα δύο κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, και άρα έχουμε γράψει κάποιο στοιχείο του $\text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ σαν κυρτό συνδυασμό των $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Καταλήξαμε δηλαδή σε άτοπο, και επομένως πρέπει $\lambda_i = 0 \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

2. (α) Έστω A μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\text{conv}(A)$ είναι επίσης ανοικτό.

(β) Δώστε παράδειγμα κλειστού συνόλου στον $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο.

Λύση. (α) Έστω $x \in \text{conv}(A)$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$, και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Αφού το A είναι ανοικτό, υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε $U(x_i, \varepsilon_i) \subseteq A$ για $i \in \{1, \dots, n\}$, όπου

$$U(y, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - y\| < \varepsilon\}$$

συμβολίζει, για $y \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$, την ανοικτή σφαίρα κέντρου y και ακτίνας ε . Έστω $\varepsilon := \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \varepsilon_i$. τότε $U(x_i, \varepsilon) \subseteq A$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

Έστω τώρα $y \in U(x, \varepsilon)$. Έστω $u := y - x$. Τότε $\|u\| < \varepsilon$, και $x_i + u \in U(x_i, \varepsilon)$ επειδή $\|(x_i + u) - x_i\| < \varepsilon$, για όλα τα $i \in \{1, \dots, n\}$. επομένως $x_i + u \in A \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Όμως

$$y = x + u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + u),$$

και επομένως $y \in \text{conv}(A)$, αφού γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των στοιχείων $x_1 + u, \dots, x_n + u$ του A .

(β) Ένα απλό παράδειγμα είναι το σύνολο $B := \{(0, 1)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Το σύνολο αυτό είναι προφανώς κλειστό, αφού καθένα από τα $\{(0, 1)\}$ (μονοσύνολο) και $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ είναι κλειστό, αλλά η κυρτή του θήκη είναι το σύνολο

$$\text{conv}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < 1\} \cup \{(0, 1)\},$$

το οποίο φυσικά δεν είναι κλειστό. Πράγματι, το σύνολο

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < 1\} \cup \{(0, 1)\}$$

είναι κυρτό: αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ με $y_1, y_2 \in [0, 1)$, και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

και προφανώς $0 \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 < \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1$, αφού $\lambda \notin \{0, 1\}$, και άρα $\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in C$. και αν $(x_1, y_1) \in C$ με $y_1 \in [0, 1)$ και $(x_2, y_2) = (0, 1)$, και $\lambda \in (0, 1)$ πάλι, τότε

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1 + (1 - \lambda)),$$

και $\lambda y_1 + (1 - \lambda) < \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) = 1$, αφού $\lambda > 0$, και άρα $\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in C$ και πάλι. Αφού λοιπόν το C είναι κυρτό, και αφού περιέχει το B , περιέχει και την κυρτή θήκη $\text{conv}(B)$ του B .

Αντιστρόφως, αν $(x, y) \in C$, τότε $y \in [0, 1]$. Αν $y = 0$ ή $y = 1$ τότε $(x, y) \in B \subseteq \text{conv}(B)$. Αν πάλι $(x, y) \in C$ με $0 < y < 1$, θεωρεί κανείς την ευθεία

$$Y = \frac{y-1}{x}X + 1$$

που περνάει από το (x, y) και το σημείο $(0, 1)$, αν $x \neq 0$, ή την ευθεία $X = 0$ αν $x = 0$, η οποία τέμνει τον άξονα των X στο σημείο $(x/(1-y), 0)$. το σημείο (x, y) είναι τότε κυρτός συνδυασμός των σημείων $(x/(1-y), 0)$ και $(0, 1)$ του B :

$$(x, y) = (1 - y) \left(\frac{x}{1 - y}, 0 \right) + y(0, 1).$$

Αυτό δείχνει ότι $C \subseteq \text{conv}(B)$, και άρα τελικά $C = \text{conv}(B)$.

3. (α) Έστω S μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα S και $\text{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(β) Έστω S_1 και S_2 μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$\text{conv}(S_1 + S_2) = \text{conv}(S_1) + \text{conv}(S_2).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\text{conv}(S^0) \subseteq (\text{conv}(S))^0$, όπου A^0 συμβολίζει το εσωτερικό του A για ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ισχύει πάντα ισότητα;

[Υπόδειξη: αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, τότε και $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_i \mu_j) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i) \cdot (\sum_{j=1}^m \mu_j) = 1 \cdot 1 = 1$.]

Λύση. (α) Αφού $S \subseteq \text{conv}(S)$ έχει κανείς άμεσα ότι $\text{diam}(S) \leq \text{diam}(\text{conv}(S))$. Αντιστρόφως, έστω $x, y \in \text{conv}(S)$, και έστω ότι

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \text{και} \quad y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j,$$

με $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, και $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j x_i,$$

και όμοια $y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j y_j$, και άρα

$$\begin{aligned}
 \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j x_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j y_j \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i - y_j) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \|x_i - y_j\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \text{diam}(S) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) \text{diam}(S) \\
 &= \text{diam}(S).
 \end{aligned}$$

Αφού τα $x, y \in \text{conv}(S)$ ήταν αυθαίρετα, αυτό δείχνει ότι και $\text{diam}(\text{conv}(S)) \leq \text{diam}(S)$, και άρα τελικά $\text{diam}(\text{conv}(S)) = \text{diam}(S)$.

(β) Αν $x \in \text{conv}(S_1 + S_2)$, τότε $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + y_i)$ με $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, και $x_1, \dots, x_n \in S_1$ και $y_1, \dots, y_n \in S_2$. Τότε προφανώς

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\in \text{conv}(S_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i}_{\in \text{conv}(S_2)}$$

και $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{conv}(S_1)$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \text{conv}(S_2)$. άρα $x \in \text{conv}(S_1) + \text{conv}(S_2)$.

Αντιστρόφως, έστω $x \in \text{conv}(S_1)$ και $y \in \text{conv}(S_2)$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ και $\mu_1, \dots, \mu_m \in [0, 1]$, $n, m \in \mathbb{N}$, με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, και $x_1, \dots, x_n \in S_1$ και $y_1, \dots, y_m \in S_2$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ και $y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j$. Τότε

$$\begin{aligned}
 x + y &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i + y_j),
 \end{aligned}$$

και $\lambda_i \mu_j \geq 0 \ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

γράψαμε δηλαδή το $x + y$ σαν κυρτό συνδυασμό των στοιχείων $x_i + y_j$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, του $S_1 + S_2$. Έπεται ότι $x + y \in \text{conv}(S_1 + S_2)$.

(γ) Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $S \neq \emptyset$. Επειδή $S^0 \subseteq S$ πρέπει $\text{conv}(S^0) \subseteq \text{conv}(S)$. Από την Άσκηση 2(α) όμως, $\text{conv}(S^0)$ είναι ανοικτό σύνολο, και αφού περιέχεται στο $\text{conv}(S)$

πρέπει να περιέχεται και στο εσωτερικό του $(\text{conv}(S))^0$, αφού το τελευταίο είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $\text{conv}(S)$ (η ένωση όλων των ανοικτών που περιέχονται στο $\text{conv}(S)$).

Η ισότητα $\text{conv}(S^0) = [\text{conv}(S)]^0$ δεν ισχύει πάντα. Αν, για παράδειγμα, το S αποτελείται από τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, ας πούμε τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$, τότε προφανώς $S^0 = \emptyset$ και άρα και $\text{conv}(S^0) = \emptyset$, αλλά $\text{conv}(S)$ είναι ένα μη τετριμμένο τρίγωνο, εν προκειμένω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$, και άρα $[\text{conv}(S)]^0$ είναι το εσωτερικό αυτού του τριγώνου που προφανώς δεν είναι κενό. Συγκεκριμένα, $\text{conv}(S) = \text{conv}(\{x_0, x_1, x_2\})$ είναι ένα simplex, $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, και άρα

$$[\text{conv}(S)]^0 = \{c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 : c_0, c_1, c_2 \in (0,1), c_0 + c_1 + c_2 = 1\},$$

που είναι μη κενό αφού περιέχει το σημείο $\frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, για παράδειγμα.

4. Έστω $\delta > 0$, $m, d \in \mathbb{N}$ με $m \geq d+1$, και $K_1, \dots, K_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, με την ιδιότητα ότι για κάθε οικογένεια $d+1$ από τα K_i , δηλαδή για κάθε $1 \leq i_1 < \dots < i_{d+1} \leq m$, υπάρχει σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από κάθε K_{i_j} είναι $\leq \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_{i_j}) \leq \delta$ για κάθε $j \in \{1, \dots, d+1\}$. Δείξτε ότι τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από όλα τα K_i είναι $\leq \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_i) \leq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$.

Λύση. Έστω

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K_i) \leq \delta\} \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

τότε κάθε B_i είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $x, y \in B_i$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - z\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda z - (1-\lambda)z\| \\ &= \|\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)\| \\ &\leq \lambda\|x-z\| + (1-\lambda)\|y-z\| \\ &\leq \lambda\delta + (1-\lambda)\delta \\ &= \delta, \end{aligned}$$

για κάθε $z \in K_i$, και άρα $d(\lambda x + (1-\lambda)y, K_i) \leq \delta$, δηλαδή $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_i$. Από την υπόθεση τώρα έχει κανείς ότι κάθε επιλογή $d+1$ από τα B_i έχει μη κενή τομή. Από το Θεώρημα του Helly έπεται ότι η τομή όλων των B_i είναι μη κενή: $\bigcap_{i=1}^m B_i \neq \emptyset$. Αυτό όμως σημαίνει ακριβώς ότι υπάρχει x με $x \in B_i$ για κάθε i , δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_i) \leq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$.

5. (α) Έστω K μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $x \in \text{ri}(K)$ ανν για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$ υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1-\mu)y \in K$.

(β) Δείξτε ότι αν $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$ και $S := \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ το αντίστοιχο k -simplex, τότε

$$\text{ri}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0,1), \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}.$$

Λύση. (α) Έστω $x \in \text{ri}(K)$. τότε, εξ' ορισμού, υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$U(x, r) \cap \text{aff}(K) \subseteq K,$$

όπου $U(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < r\}$ η ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας r . Έστω τώρα και $y \in K \setminus \{x\}$. Τότε $\|\mu x + (1 - \mu)y - x\| = |1 - \mu|\|y - x\| < r$, και για $1 \leq \mu < 1 + r/\|x - y\|$, έχει κανείς ότι $\mu x + (1 - \mu)y \in U(x, r) \subseteq K$. Άρα υπάρχει $\mu > 1$ ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K$.

Αντιστρόφως, έστω $x \in \mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$ υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K$. πρέπει να δειχθεί ότι $x \in \text{ri}(K)$. Αφού το K είναι κυρτό, $\text{ri}(K) \neq \emptyset$, και έστω $y \in \text{ri}(K)$. Αν $x = y$ τότε $x \in \text{ri}(K)$. Έστω λοιπόν ότι $x \neq y$. Τότε υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K$, και έστω z αυτό το σημείο, δηλαδή $z = \mu x + (1 - \mu)y$ για αυτό το μ . Τότε $[y, z] \subseteq \text{ri}(K)$ και προφανώς $x \in [y, z]$: $x = \lambda z + (1 - \lambda)y$ με $\lambda = 1/\mu \in (0, 1)$. Έπεται ότι $x \in \text{ri}(K)$.

(β) Έχει κανείς ότι

$$S = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\}) = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in [0, 1], \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}.$$

Έστω λοιπόν $x = \sum_{i=0}^k c_i x_i$ με $c_0, c_1, \dots, c_k \in (0, 1)$ και $\sum_{i=0}^k c_i = 1$, και έστω $y \in S \setminus \{x\}$. τότε το y γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός $\sum_{i=0}^k a_i x_i$, $a_0, a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ και $\sum_{i=0}^k a_i = 1$. Τότε

$$(4) \quad \mu x + (1 - \mu)y = \sum_{i=0}^k [\mu c_i + (1 - \mu)a_i] x_i.$$

Έστω $A := \max\{a_0, a_1, \dots, a_k\} \leq 1$ και $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \min\{A, c_0, c_1, \dots, c_k\}$. έστω επίσης μ με $1 < \mu \leq A/(A - \varepsilon)$. Τότε $\mu c_i + (1 - \mu)a_i \geq \mu \varepsilon + (1 - \mu)A \geq 0$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, και η (4) δίνει ότι $\mu x + (1 - \mu)y \in K$, αφού και

$$\sum_{i=1}^k \mu c_i + (1 - \mu)a_i = \mu \sum_{i=1}^k c_i + (1 - \mu) \sum_{i=1}^k a_i = \mu + (1 - \mu) = 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$, βρέθηκε $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K$. Έπεται ότι $x \in \text{ri}(S)$. Αυτό δείχνει ότι

$$(5) \quad \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0, 1), \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\} \subseteq \text{ri}(S).$$

Έστω τώρα $x \in S$, με $x = \sum_{i=0}^k c_i x_i$ με $c_0, c_1, \dots, c_k \in [0, 1]$ και $\sum_{i=0}^k c_i = 1$, και $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Θα δείξουμε ότι τότε $x \notin \text{ri}(S)$, και αυτό δείχνει ότι ο εγκλεισμός (5) είναι τελικά ισότητα. Έστω $y = x_i$. τότε $y \neq x$ διότι κάθε σημείο της αφινικής θήκης των $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν αφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$, λόγω της αφινικής ανεξαρτησίας των $x_0, x_1, \dots, x_k$. αν είχαμε $x_i = x = \sum_{j=0}^k c_j x_j$ θα είχαμε γράψει το ίδιο στοιχείο σαν

αφφινικό συνδυασμό των $x_0, x_1, \dots, x_k$ με συντελεστή του x_i ίσο με 1 την μία φορά και με συντελεστή $c_i = 0$ την άλλη. (Ισοδύναμα, αν είχαμε $x_i = \sum_{j=0}^k c_j x_j$, τότε θα είχαμε ότι $\sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} c_j x_j - x_i = 0$, με συντελεστές που έχουν άθροισμα $\sum_{j=0}^k c_j + (-1) = 1 - 1 = 0$, και κάποιον από αυτούς, τον συντελεστή -1 , μη μηδενικό· αυτό αντίκειται στην αφφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \dots, x_k$.) Από την άλλη,

$$\mu x + (1 - \mu)y = \mu x + (1 - \mu)x_i = \sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j x_j + (1 - \mu)x_i,$$

και για $\mu > 1$ αυτό είναι ένας αφφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$ με τον συντελεστή $1 - \mu$ του x_i αρνητικό, και άρα δεν μπορεί να ισούται με ένα στοιχείο του S , που αποτελείται αποκλειστικά από αφφινικούς συνδυασμούς με μη αρνητικούς συντελεστές, πάλι λόγω του ότι κάθε στοιχείο της αφφινικής θήκης των $x_0, x_1, \dots, x_k$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν αφφινικός συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$ · ισοδύναμα, αν είχαμε $\mu x + (1 - \mu)y \in S$, δηλαδή

$$\mu x + (1 - \mu)y = \sum_{j=0}^k a_j x_j \Leftrightarrow \sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j x_j + (1 - \mu)x_i = \sum_{j=0}^k a_j x_j,$$

για κάποια $a_0, a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ και $\sum_{j=0}^k a_j = 1$, με $\mu > 1$, τότε θα είχαμε ότι

$$\sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} (\mu c_j - a_j) x_j + [(1 - \mu) - a_i] x_i = 0,$$

με τους συντελεστές να έχουν άθροισμα

$$\sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} (\mu c_j - a_j) + [(1 - \mu) - a_i] = \sum_{j \in \{0,1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \mu c_j + (1 - \mu) - \sum_{j=0}^k a_j = \mu + (1 - \mu) - 1 = 0,$$

αλλά με $(1 - \mu) - a_i < -a_i \leq 0$ · και αυτό θα ήταν και πάλι σε αντίφαση με την αφφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \dots, x_k$.

Δείξαμε επομένως ότι για $y = x_i$, $\mu x + (1 - \mu)y \notin S \ \forall \mu > 1$ και άρα $x \notin \text{ri}(S)$, από το (α). Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x = \sum_{i=0}^k c_i x_i \in S$ με $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, έπεται ότι αυτά τα στοιχεία του S δεν ανήκουν στο $\text{ri}(S)$ και επομένως ο εγκλεισμός (5) είναι τελικά ισότητα.

6. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό και κυρτό. Δείξτε ότι:

(α) $\text{aff}(K) = \text{aff}(\bar{K}) = \text{aff}(\text{ri}(K))$.

(β) $\text{ri}(K) = \text{ri}(\bar{K}) = \text{ri}(\text{ri}(K))$.

(γ) $\text{rb}(K) = \text{rb}(\bar{K}) = \text{rb}(\text{ri}(K))$.

Λύση. (α) Προφανώς, αφού $\text{ri}(S) \subseteq S \subseteq \bar{S}$, έχει κανείς αυτόματα ότι $\text{aff}(\text{ri}(S)) \subseteq \text{aff}(S) \subseteq \text{aff}(\bar{S})$ για οποιοδήποτε $S \subseteq \mathbb{R}^d$ · για αυτούς τους εγκλεισμούς δηλαδή δεν απαιτείται κυρτότητα. Επίσης, $\text{aff}(S)$ είναι κλειστό σύνολο για οποιοδήποτε $S \subseteq \mathbb{R}^d$, γιατί κάθε αφφινικός υπόχωρος είναι κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^d$, γιατί κάθε γραμμικός υπόχωρος είναι κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^d$. Έπεται τώρα από αυτό ότι $\bar{S} \subseteq \text{aff}(S)$,

αφού $\bar{S}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το S , και αφού τώρα ο $\text{aff}(S)$ είναι αφφινικός υπόχωρος, πρέπει και $\text{aff}(\bar{S}) \subseteq \text{aff}(S)$, γιατί η αφφινική θήκη $\text{aff}(\bar{S})$ είναι ο μικρότερος αφφινικός υπόχωρος που περιέχει το $\bar{S}$. Επομένως και αυτός ο εγκλεισμός δεν απαιτεί κυρτότητα, και άρα η ισότητα $\text{aff}(S) = \text{aff}(\bar{S})$ ισχύει για οποιοδήποτε υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Έστω τώρα ότι το K είναι κυρτό, μη κενό· θα δειχθεί ότι $\bar{K} \subseteq \text{aff}(\text{ri}(K))$. Πράγματι, έστω $y \in \bar{K}$, και έστω $x \in \text{ri}(K)$, το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι μη κενό. Αν $y = x$ τότε $y \in \text{ri}(K) \subseteq \text{aff}(\text{ri}(K))$. αν πάλι $y \neq x$, τότε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ περιέχεται στο $\text{ri}(K)$, και αφού το $\text{aff}(\text{ri}(K))$ είναι κλειστό, πρέπει $[x, y] = \overline{[x, y]} \subseteq \text{aff}(\text{ri}(K))$, και άρα $y \in \text{aff}(\text{ri}(K))$. Επομένως $\bar{K} \subseteq \text{aff}(\text{ri}(K))$. Έπεται τώρα άμεσα ότι και $\text{aff}(\bar{K}) \subseteq \text{aff}(\text{ri}(K))$, γιατί η κυρτή θήκη $\text{aff}(\bar{K})$ είναι ο μικρότερος αφφινικός υπόχωρος που περιέχει το $\bar{K}$. (β) Από το (α) έχει κανείς ότι $\text{aff}(K) = \text{aff}(\bar{K}) = \text{aff}(\text{ri}(K))$. αφού $\text{ri}(K) \subseteq K \subseteq \bar{K}$, έπεται ότι $\text{ri}(\text{ri}(K)) \subseteq \text{ri}(K) \subseteq \text{ri}(\bar{K})$, επειδή τα εσωτερικά είναι ως προς την ίδια τοπολογία, την σχετική τοπολογία του $\text{aff}(K) = \text{aff}(\bar{K}) = \text{aff}(\text{ri}(K))$, και άρα $\text{ri}(\text{ri}(K))$, που είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο σε αυτήν την τοπολογία που περιέχεται στο $\text{ri}(K)$, θα περιέχεται και στο K και άρα και στο $\text{ri}(K)$, που είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο σε αυτήν την τοπολογία που περιέχεται στο K , και όμοια $\text{ri}(K) \subseteq \text{ri}(\bar{K})$. Εναλλακτικά, μπορεί να επιχειρηματολογήσει κανείς ως εξής. Αν $x \in \text{ri}(\text{ri}(K))$, τότε για κάποιο $r > 0$ έχει κανείς ότι $U(x, r) \cap \text{aff}(\text{ri}(K)) \subseteq \text{ri}(K)$, όπου $U(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$ η ανοικτή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας r στον $\mathbb{R}^d$. αφού $U(x, r) \cap \text{aff}(K) = U(x, r) \cap \text{aff}(\text{ri}(K))$, έπεται ότι

$$U(x, r) \cap \text{aff}(K) = U(x, r) \cap \text{aff}(\text{ri}(K)) \subseteq \text{ri}(K) \subseteq K$$

και άρα $x \in \text{ri}(K)$. Αυτό δείχνει ότι $\text{ri}(\text{ri}(K)) \subseteq \text{ri}(K)$. Όμοια, αν $y \in \text{ri}(K)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $U(y, \delta) \cap \text{aff}(K) \subseteq K$. τότε $U(y, \delta) \cap \text{aff}(\bar{K}) = U(y, \delta) \cap \text{aff}(K) \subseteq K \subseteq \bar{K}$, και άρα $y \in \text{ri}(\bar{K})$. Αυτό δείχνει ότι και $\text{ri}(K) \subseteq \text{ri}(\bar{K})$.

Το $\text{ri}(K)$ είναι ανοικτό σύνολο στην σχετική τοπολογία του $\text{aff}(K)$ και άρα και ανοικτό σύνολο στην σχετική τοπολογία του $\text{aff}(\text{ri}(K))$, αφού από το (α) $\text{aff}(\text{ri}(K)) = \text{aff}(K)$. Επίσης περιέχεται στο $\text{ri}(K)$ και άρα πρέπει να περιέχεται και στο εσωτερικό του τελευταίου ως προς την σχετική τοπολογία του $\text{aff}(\text{ri}(K))$, δηλαδή το $\text{ri}(\text{ri}(K))$, αφού το τελευταίο είναι το μεγαλύτερο ανοικτό στην σχετική τοπολογία του $\text{aff}(\text{ri}(K))$ που περιέχεται στο $\text{ri}(K)$. Άρα $\text{ri}(K) \subseteq \text{ri}(\text{ri}(K))$, και επομένως $\text{ri}(K) = \text{ri}(\text{ri}(K))$.

Θα δειχθεί τέλος τώρα ότι και $\text{ri}(\bar{K}) \subseteq \text{ri}(K)$. Έστω $y \in \text{ri}(\bar{K})$. Έστω επίσης $x \in \text{ri}(K)$. Αν $x = y$, τότε $y \in \text{ri}(K)$. Αν πάλι $y \neq x$, τότε υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $z = \mu y + (1 - \mu)x \in \bar{K}$, από την Άσκηση 5(α). Τότε όμως $y \in [x, z]$ ($y = \lambda z + (1 - \lambda)x$ με $\lambda := 1/\mu \in (0, 1)$), και $[x, z] \subseteq \text{ri}(K)$, αφού $x \in \text{ri}(K)$ και $z \in \bar{K}$. άρα πρέπει $y \in \text{ri}(K)$. (γ) Εξ ορισμού, $\text{rb}(K) = \bar{K} \setminus \text{ri}(K)$, $\text{rb}(\bar{K}) = \bar{\bar{K}} \setminus \text{ri}(\bar{K})$ και $\text{rb}(\text{ri}(K)) = \overline{\text{ri}(K)} \setminus \text{ri}(\text{ri}(K))$. Αφού $\bar{\bar{K}} = \bar{K}$ και $\text{ri}(\bar{K}) = \text{ri}(K)$, από το (β), έπεται άμεσα ότι $\text{rb}(\bar{K}) = \text{rb}(K)$. Επίσης $\text{ri}(\text{ri}(K)) = \text{ri}(K)$, από το (β) πάλι, και $\overline{\text{ri}(K)} = \bar{K}$. Πράγματι, $\text{ri}(K) \subseteq K \Rightarrow \overline{\text{ri}(K)} \subseteq \bar{K}$. και αν $y \in \bar{K}$, έστω και $x \in \text{ri}(K)$. τότε $[x, y] \in \text{ri}(K)$, και επομένως $[x, y] = \overline{[x, y]} \subseteq \overline{\text{ri}(K)}$, που δίνει ότι $y \in \overline{\text{ri}(K)}$. Άρα όντως $\overline{\text{ri}(K)} = \bar{K}$, που σε συνδυασμό με την $\text{ri}(\text{ri}(K)) = \text{ri}(K)$ δίνουν ότι $\text{rb}(\text{ri}(K)) = \text{rb}(K)$.

7. (α) Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $\text{ri}(K_1 \cap K_2) = \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$.

(β) Έστω K_i , $i \in I$, οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\bigcap_{i \in I} \text{ri}(K_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$.

Λύση. (α) Θα χρησιμοποιηθεί η Άσκηση 5(α) πάλι. Έστω $x \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$ και έστω και $y \in K_1 \cap K_2$ με $y \neq x$. Τότε $y \in K_1$ και $x \in \text{ri}(K_1)$, με $y \neq x$, και άρα υπάρχει $\mu_1 > 1$ ώστε $z_1 := \mu_1 x + (1 - \mu_1)y \in K_1$, από την Άσκηση 5(α). Όμοια υπάρχει $\mu_2 > 1$ ώστε $z_2 := \mu_2 x + (1 - \mu_2)y \in K_2$. Τότε, από κυρτότητα, $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1$ για κάθε $\mu \in [0, \mu_1]$ και $\mu x + (1 - \mu)y \in K_2$ για κάθε $\mu \in [0, \mu_2]$, επειδή $y \in K_i$ και $z_i = \mu_i x + (1 - \mu_i)y \in K_i$ και άρα και $[y, z_i] \subseteq K_i$, $i \in \{1, 2\}$, και

$$\mu x + (1 - \mu)y = [\mu_i x + (1 - \mu_i)y] \frac{\mu}{\mu_i} + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)y = \frac{\mu}{\mu_i} z_i + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)y \in [y, z_i]$$

για $\mu \in [0, \mu_i]$, $i \in \{1, 2\}$. Έπεται ότι, αν $\mu := \min\{\mu_1, \mu_2\} > 1$, τότε $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$. Αποδείχθηκε δηλαδή ότι για κάθε $y \in K_1 \cap K_2$ με $y \neq x$, υπάρχει $\mu > 1$ ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$. Έπεται από την Άσκηση 5(α) πάλι ότι $x \in \text{ri}(K_1 \cap K_2)$. Αφού $x \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$ ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι $\text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2) \subseteq \text{ri}(K_1 \cap K_2)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \text{ri}(K_1 \cap K_2)$. Έστω και $y \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$, το οποίο υποθέτουμε μη κενό. Αν $y = x$ τότε $x \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$. Αν $y \neq x$, υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $z := \mu x + (1 - \mu)y \in K_1 \cap K_2$, από την Άσκηση 5(α), αφού $x \in \text{ri}(K_1 \cap K_2)$ και $y \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2) \subseteq K_1 \cap K_2$, με $y \neq x$. Τότε όμως, επειδή $y \in \text{ri}(K_1)$, αφού $y \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$, και $z \in \bar{K}_1$, αφού $z \in K_1 \cap K_2$ και άρα $z \in K_1$, πρέπει και $[y, z] \subseteq \text{ri}(K_1)$ · όμως $x \in [y, z]$ (πράγματι $x = \mu^{-1}z + (1 - \mu^{-1})y$, και $\mu^{-1} \in (0, 1)$) και άρα πρέπει $x \in \text{ri}(K_1)$. Όμοια $x \in \text{ri}(K_2)$ και έτσι τελικά $x \in \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$. Αφού το x ήταν αυθαίρετο στοιχείο του $\text{ri}(K_1 \cap K_2)$, έπεται ότι $\text{ri}(K_1 \cap K_2) \subseteq \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$, και άρα τελικά $\text{ri}(K_1 \cap K_2) = \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$.

(β) Προφανώς $\bigcup_{i \in I} K_i \subseteq \bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$ αφού $K_i \subseteq \bar{K}_i$ για κάθε $i \in I$ · επειδή τώρα το $\bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$ είναι κλειστό (τομή κλειστών), έπεται ότι και $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$, αφού η κλειστή θήκη $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $\bigcap_{i \in I} K_i$.

Για το αντίστροφο, επιλέγουμε πρώτα ένα $y \in \bigcap_{i \in I} \text{ri}(K_i)$. Έστω τώρα $x \in \bigcap_{i \in I} \bar{K}_i$. Τότε $[y, x] \subseteq \text{ri}(K_i) \forall i \in I$. Επομένως $[y, x] \subseteq K_i \forall i \in I$ και άρα $[y, x] \subseteq \bigcap_{i \in I} K_i$. Έπεται ότι $[y, x] = \overline{[y, x]} \subseteq \overline{\bigcap_{i \in I} K_i}$ και άρα $x \in \overline{\bigcap_{i \in I} K_i}$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό $\bigcap_{i \in I} \bar{K}_i \subseteq \overline{\bigcap_{i \in I} K_i}$ και άρα τελικά $\bigcap_{i \in I} \bar{K}_i = \overline{\bigcap_{i \in I} K_i}$.

8. Έστω $S = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\})$ ένα d -simplex στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $y \in S^\circ$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\} \setminus \{x_i\} \cup \{y\}) \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

είναι d -simplices, έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και $S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_d$.

Λύση. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα S_i αποτελούν d -simplices, ότι δηλαδή τα σύνολα $(\{x_0, x_1, \dots, x_d\} \setminus \{x_i\}) \cup \{y\}$ αποτελούνται από αφφινικά ανεξάρτητα σημεία. Εξ υποθέσεως, υπάρχουν καταρχήν $c_0, c_1, \dots, c_d \in (0, 1)$, με $\sum_{i=0}^d c_i = 1$, τέτοια ώστε

$$(6) \quad y = \sum_{i=0}^d c_i x_i,$$

επειδή το y είναι εσωτερικό σημείο του d -simplex $\text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\})$. Έστω λοιπόν $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ και έστω $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ με $\sum_{j=0}^d \lambda_j = 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_j x_j + \lambda_i y = 0.$$

Αντικαθιστώντας το y με το ίσον του από την έκφραση (6) παίρνει κανείς την

$$\sum_{j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} (\lambda_j + \lambda_i c_j) x_j + \lambda_i c_i x_i = 0.$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} (\lambda_j + \lambda_i c_j) + \lambda_i c_i &= \sum_{j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_j + \lambda_i \sum_{j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} c_j + \lambda_i c_i \\ &= -\lambda_i + \lambda_i \sum_{j=0}^d c_j = -\lambda_i + \lambda_i = 0, \end{aligned}$$

και επομένως, από την αφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \dots, x_d$, πρέπει

$$\lambda_j + \lambda_i c_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\} \quad \text{και} \quad \lambda_i c_i = 0.$$

Αφού τώρα $c_i > 0$, πρέπει $\lambda_i = 0$ και κατόπιν έπεται ότι και τα υπόλοιπα λ_j πρέπει να είναι μηδέν. Αποδείχθηκε επομένως ότι τα σημεία x_i , $i \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}$, και y είναι αφινικά ανεξάρτητα, για τυχόν $i \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $S_i^0 \cap S_j^0 = \emptyset$. Έστω ότι όχι και έστω $x \in S_i^0 \cap S_j^0$. Τότε υπάρχουν $a_0, a_1, \dots, a_d$ και $b_0, b_1, \dots, b_d$ στο $(0, 1)$, με $\sum_{k=0}^d a_k = \sum_{k=0}^d b_k = 1$, τέτοια ώστε

$$x = \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} a_k x_k + a_i y = \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{j\}} b_k x_k + b_j y.$$

τα a_k και b_k είναι > 0 επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο των d -simplices S_i και S_j . Η δεύτερη ισότητα, αυτή μεταξύ των δύο κυρτών συνδυασμών, είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}} (a_k - b_k) x_k + a_j x_j - b_i x_i + (a_i - b_j) y = 0,$$

και αντικαθιστώντας το y με το ίσον του από την (6), αυτό γίνεται

$$\sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}} (a_k - b_k) x_k + a_j x_j - b_i x_i + (a_i - b_j) \sum_{k=0}^d c_k x_k = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}} [(a_k - b_k) + (a_i - b_j) c_k] x_k + [a_j + (a_i - b_j) c_j] x_j - [b_i - (a_i - b_j) c_i] x_i = 0.$$

Για τους συντελεστές εδώ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{i,j\}} [(a_k - b_k) + (a_i - b_j)c_k] + a_j + (a_i - b_j)c_j - [b_i - (a_i - b_j)c_i] \\
 &= \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{i\}} a_k - \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{j\}} b_k + (a_i - b_j) \sum_{k=0}^d c_k \\
 &= \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{i\}} a_k - \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{j\}} b_k + (a_i - b_j) \cdot 1 \\
 &= \sum_{k=0}^d a_k - \sum_{k=0}^d b_k = 1 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

αφού λοιπόν τα $x_0, x_1, \dots, x_d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, πρέπει

$$\begin{aligned}
 & a_j + (a_i - b_j)c_j = 0, \\
 & b_i - (a_i - b_j)c_i = 0, \\
 & \text{και } (a_k - b_k) + (a_i - b_j)c_k = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}.
 \end{aligned}$$

Από τις δύο πρώτες από αυτές όμως προκύπτει ότι

$$a_i - b_j = -\frac{a_j}{c_j} < 0 \quad \text{και} \quad a_i - b_j = \frac{b_i}{c_i} > 0,$$

που φυσικά αποτελεί αντίφαση. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο x , και άρα $S_i^0 \cap S_j^0 = \emptyset$.

Τέλος, έχει κανείς προφανώς ότι $S_i \subseteq S \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$. πράγματι, κάθε ένα από τα σημεία x_j , $j \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}$, και y ανήκουν στο S , και αφού το S είναι κυρτό πρέπει να περιέχει και την κυρτή θήκη αυτών των σημείων. Για να δείξει λοιπόν κανείς ότι $S = \bigcup_{i=0}^d S_i$, αρκεί να δείξει ότι κάθε $x \in S$ ανήκει σε κάποιο S_i , $i \in \{0, 1, \dots, d\}$. Έστω $x \in S$, και έστω ότι $x = \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i$, με $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in [0, 1]$ και $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$. Αν $x \in S_i$ για κάποιο i , θα πρέπει να υπάρχουν $a_0, a_1, \dots, a_d \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $\sum_{k=0}^d a_k = 1$ και

$$x = \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{i\}} a_k x_k + a_i y = \sum_{k \in \{0,1,\dots,d\} \setminus \{i\}} (a_k + a_i c_k) x_k + a_i c_i x_i.$$

Τα $a_0, a_1, \dots, a_d$ θα πρέπει επομένως να ικανοποιούν τις ισότητες

$$\lambda_i = a_i c_i \quad \text{και} \quad \lambda_k = a_k + a_i c_k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\},$$

ή ισοδύναμα τις

$$a_i = \frac{\lambda_i}{c_i} \quad \text{και} \quad a_k = \lambda_k - a_i c_k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\},$$

και ταυτόχρονα θα πρέπει $a_k \geq 0$ για κάθε k και $\sum_{k=0}^d a_k = 1$. Επιλέγουμε επομένως $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\lambda_i}{c_i} = \min_{j \in \{0,1,\dots,d\}} \frac{\lambda_j}{c_j},$$

και θέτουμε

$$a_i := \frac{\lambda_i}{c_i} \quad \text{και} \quad a_k := \lambda_k - a_i c_k \quad k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}.$$

τότε προφανώς $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, d\}$, και

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^d a_k &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} (\lambda_k - a_i c_k) + a_i \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k - a_i \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} c_k + a_i \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k - a_i (1 - c_i) + a_i \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k + a_i c_i \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k + \lambda_i = 1, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} a_k x_k + a_i y &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} (\lambda_k - a_i c_k) x_k + a_i y \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k - a_i \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} c_k x_k + a_i y \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k - a_i \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} c_k x_k + a_i \sum_{k=0}^d c_k x_k \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k + a_i c_i x_i \\ &= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, d\} \setminus \{i\}} \lambda_k x_k + \lambda_i x_i = x. \end{aligned}$$

Επομένως $x \in S_i$.

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, μη κενό. Δείξτε ότι

$$\overline{\text{conv}(S)} = \bigcap \left\{ K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S, K \text{ κλειστό και κυρτό} \right\}.$$

Λύση. Έστω C το δεξιό μέλος της προς απόδειξη ισότητας:

$$C := \bigcap \left\{ K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S, K \text{ κλειστό και κυρτό} \right\}.$$

Αν K κυρτό και κλειστό και $S \subseteq K$, τότε $\text{conv}(S) \subseteq K$ επειδή η κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ είναι το μικρότερο κυρτό που περιέχει το S (η τομή όλων των κυρτών που περιέχουν το S), και τότε $\overline{\text{conv}(S)} \subseteq K$ επειδή το K είναι και κλειστό, αφού η κυρτή θήκη $\overline{\text{conv}(S)}$ είναι το μικρότερο κλειστό που περιέχει το $\text{conv}(S)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε κλειστό και κυρτό K που περιέχει το S , έπεται ότι $\overline{\text{conv}(S)} \subseteq C$.

Από την άλλη $\overline{\text{conv}(S)}$ είναι κυρτό και κλειστό και περιέχει το S και άρα είναι στοιχείο του

$$\left\{ K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S, K \text{ κλειστό και κυρτό} \right\}.$$

έπεται ότι $C \subseteq \overline{\text{conv}(S)}$.

10. (α) Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

ένα πολυώνυμο, με $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Δείξτε ότι οι ρίζες της παραγώγου P' του P περιέχονται στην κυρτή θήκη των ριζών του P .

(β) Έστω $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, και έστω $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του P . Δείξτε ότι η διάμετρος του συνόλου $\{z_1, \dots, z_4\}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\text{diam}(\{z_1, \dots, z_4\}) \geq \sqrt{\left| \frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} \right|}.$$

[Υπόδειξη: Αν $z_1, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του P στο (α), το P γράφεται σαν $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $1/\bar{z} = z/|z|^2$ για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z .]

Λύση. (α) Έστω $z_1, \dots, z_n$ οι ρίζες του P . Τότε το P γράφεται σαν γινόμενο $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Παραγωγίζοντας ως προς z βρίσκει κανείς ότι

$$P'(z) = a_n \sum_{k=1}^n \prod_{m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} (z - z_m),$$

και αν $z \notin \{z_1, \dots, z_k\}$, αυτό γράφεται σαν

$$(7) \quad P'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{P(z)}{z - z_k}.$$

Αν λοιπόν z είναι μία ρίζα του $P'(z)$, τότε ή $z \in \{z_1, \dots, z_k\}$, και άρα τότε το z ανήκει στην κυρτή θήκη $\text{conv}(\{z_1, \dots, z_k\})$ των ριζών του P , ή $z \notin \{z_1, \dots, z_k\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η (7) δίνει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \frac{P(z)}{z - z_k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \sum_{k=1}^n z_k \lambda_k, \end{aligned}$$

με

$$\lambda_k := \frac{|z - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^n |z - z_j|^{-2}} \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

και προφανώς $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ και $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Άρα $z \in \text{conv}(\{z_1, \dots, z_n\})$.

(β) Έστω $\{z_1, \dots, z_4\}$ οι ρίζες του P , $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ οι ρίζες του P' και $\{w_1, w_2\}$ οι ρίζες του

P'' . Από το (α), $\{w_1, w_2\} \subseteq \text{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\})$ και $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \subseteq \text{conv}(z_1, \dots, z_4)$. αφού το $\text{conv}(\{z_1, \dots, z_4\})$ είναι κυρτό σύνολο και περιέχει τα $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ θα περιέχει και την κυρτή τους θήκη $\text{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\})$, αφού η τελευταία είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Έπεται τώρα ότι

$$\{w_1, w_2\} \subseteq \text{conv}(\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}) \subseteq \text{conv}(\{z_1, \dots, z_4\}).$$

Από την Άσκηση 3(α),

$$\text{diam}(\{z_1, \dots, z_4\}) = \text{diam}(\text{conv}(\{z_1, \dots, z_4\})) \geq \text{diam}(\{w_1, w_2\}) = |w_1 - w_2|,$$

και απευθείας υπολογισμός δίνει ότι $P''(z) = 12z^2 + 6az + 2b$, του οποίου οι ρίζες είναι

$$w_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - (8/3)b}}{4}, \quad w_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - (8/3)b}}{4},$$

οπότε

$$w_1 - w_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3}}.$$