

Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 4

1. Έστω K μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν

$$(1) \quad \|p_K(x) - p_K(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε $x - p_K(x) = y - p_K(y)$. Αν η (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, τι συμπεραίνει κανείς για το K ;

Λύση. Μία από τις ιδιότητες της μετρικής προβολής που αποδείχθηκε στο μάθημα είναι η

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2^2 + \|[x - p_K(x)] - [y - p_K(y)]\|_2^2 \leq \|x - y\|_2^2,$$

για αυθαίρετα $x, y \in \mathbb{R}^d$. Αν για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$ ισχύει η (1), τότε πρέπει

$$\|[x - p_K(x)] - [y - p_K(y)]\|_2^2 = 0$$

και άρα $x - p_K(x) = y - p_K(y)$.

Αν τώρα η (1) ισχύει για κάθε ζευγάρι $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε επιλέγοντας $x \in K$, που υπάρχει γιατί $K \neq \emptyset$, συμπεραίνει κανείς ότι $y - p_K(y) = x - p_K(x) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $y \in K$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$, και άρα πρέπει $K = \mathbb{R}^d$.

2. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

Λύση. (α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και τέτοιο ώστε το συμπλήρωμά του K^c είναι επίσης κυρτό. Έστω ότι $K \neq \emptyset$ και $K \neq \mathbb{R}^d$. Αν $\text{aff}(K) \neq \mathbb{R}^d$, τότε το K^c δεν είναι κυρτό: το K περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο $H(u, c) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = c\}$, ας πούμε, $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, και αν $x \in K$ και $y \in \mathbb{R}^d$ είναι τέτοιο ώστε $\langle y, u \rangle < c$, ας πούμε, τότε $y \in K^c$,

$$\langle 2x - y, u \rangle = 2\langle x, u \rangle - \langle y, u \rangle = 2c - \langle y, u \rangle > 2c - c = c,$$

και άρα $2x - y \in K^c$ επίσης, ενώ $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x - y) \notin K^c$. Άρα $\text{aff}(K) = \mathbb{R}^d$ και το K πρέπει να έχει διάσταση d . Όμοια $\text{aff}(K^c) = \mathbb{R}^d$, γιατί αλλιώς το $K = (K^c)^c$ δεν θα ήταν κυρτό.

Αφού τα K και K^c έχουν ξένα εσωτερικά (που είναι και μη κενά αφού τα K, K^c είναι κυρτά και διάστασης d), διαχωρίζονται γνήσια: υπάρχουν $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$K \subseteq H^-(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : x\langle v, x \rangle \leq b\} \quad \text{και} \quad K^c \subseteq H^+(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle \geq b\}.$$

Όμως τότε

$$K \supseteq [H^+(v, b)]^c = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle < b\},$$

και αφού το K είναι κλειστό πρέπει τελικά

$$H^-(v, b) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \langle v, x \rangle < b\}} \subseteq K.$$

Επομένως πρέπει $K = H^-(u, b)$. Άρα τα μόνα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με κυρτό συμπλήρωμα είναι τα $\emptyset$, $\mathbb{R}^d$ και οι κλειστοί ημίχωροι του $\mathbb{R}^d$.

(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $K \neq \emptyset$, κυρτό σύνολο. Αν $\text{rb}(K) \neq \emptyset$, τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $x \in \text{rb}(K)$. Άρα αν το K δεν έχει κανένα υπερεπίπεδο στήριξης, τότε πρέπει $\text{rb}(K) = \emptyset$. Άρα πρέπει $K = \text{aff}(K)$. Δηλαδή, πέραν του κενού συνόλου, οι αφηνικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^d$ είναι τα μόνα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ χωρίς κανένα υπερεπίπεδο στήριξης. (Υπενθυμίζεται ότι ο ορισμός που δόθηκε για υπερεπίπεδο στήριξης ενός K σε ένα σημείο $x \in \partial K$ ήταν ένα υπερεπίπεδο $H(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle = c\}$, $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $x \in H(u, c)$, $K \subseteq H^-(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, u \rangle \leq c\}$, και $K \not\subseteq H(u, c)$.)

3. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που δεν διαχωρίζονται γνήσια;

(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που διαχωρίζονται γνήσια αλλά όχι αυστηρά;

Λύση. (α) Όχι. Αν K_1, K_2 κυρτά και ξένα, τότε έχουν ξένα σχετικά εσωτερικά και άρα διαχωρίζονται γνήσια.

(β) Έστω $K_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ και $K_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 1/x\}$. Τα K_1 και K_2 είναι κλειστά, κυρτά, ξένα, διαχωρίζονται γνήσια, αλλά δεν διαχωρίζονται αυστηρά. Πράγματι, αν $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε πρέπει $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. αν $(x_n, y_n) \in K_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει $y_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα και $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, δηλαδή $(x, y) \in K_1$. και αν $x_n > 0$ και $y_n \geq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν $(x_n, y_n) \in K_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε πρέπει $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ και $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{-1} = x^{-1}$, και από την τελευταία πρέπει τελικά και $x \neq 0$ και άρα $(x, y) \in K_2$.

Τα K_1 και K_2 διαχωρίζονται γνήσια από το υπερεπίπεδο $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ ($= K_1$). πράγματι $H = H((u, v), 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ux + vy = 0\}$ με $(u, v) = (0, 1)$, και $K_2 \subset H^+((u, v), 0)$ και $K_2 \not\subset H$ αφού $ux + vy = y > 0 \forall (x, y) \in K_2$.

Αν τα K_1, K_2 διαχωρίζονταν αυστηρά, θα υπήρχαν $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$(2) \quad ux + vy \leq c - \varepsilon \quad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } y = 0,$$

και

$$(3) \quad ux + vy > c + \varepsilon \quad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } x > 0 \text{ και } y \geq 1/x;$$

από την (2) πρέπει $u = 0$ και $c - \varepsilon \geq 0$, γιατί αν $u > 0$ τότε $ux \rightarrow +\infty$ καθώς $x \rightarrow +\infty$ και αν $u < 0$ τότε $ux \rightarrow +\infty$ καθώς $u \rightarrow -\infty$, και από την (3) πρέπει μετά $vy > c + \varepsilon > 2\varepsilon$ για κάθε $x > 0$ και $y \geq 1/x$, και αυτό δεν γίνεται γιατί για $y = 1/x$, καθώς $x \rightarrow +\infty$ έχει κανείς ότι $vy \rightarrow 0$.

Τέλος τα K_1 και K_2 είναι κυρτά. Πράγματι, αν $(x_1, 0), (x_2, 0) \in K_1$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε

$$\lambda(x_1, 0) + (1 - \lambda)(x_2, 0) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0) \in K_1.$$

και αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_2$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2),$$

και $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 > 0$, αφού $x_1, x_2 > 0$ και $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$ και όχι ταυτόχρονα και τα δύο μηδέν, και

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \frac{\lambda}{x_1} + \frac{1 - \lambda}{x_2} = \frac{\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1}{x_1 x_2} \geq \frac{1}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2},$$

η δεύτερη ανισότητα επειδή

$$\begin{aligned} [\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1][\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] &= \lambda(1 - \lambda)(x_1^2 + x_2^2) + [\lambda^2 + (1 - \lambda)^2]x_1 x_2 \\ &\geq 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 + [\lambda^2 + (1 - \lambda)^2]x_1 x_2 \\ &= [\lambda + (1 - \lambda)]^2 x_1 x_2 \\ &= x_1 x_2, \end{aligned}$$

και άρα

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in K_2.$$

4. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κλειστό και κυρτό, και έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) := \text{dist}(x, K)$, όπου $\text{dist}(x, K) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in K\}$.

(α) Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|_2} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^d \setminus K$.

Λύση. (α) Εξ' ορισμού,

$$f(x) = \|x - p_K(x)\|_2 \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Έστω $e_1, \dots, e_d$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t},$$

εφόσον το όριο υπάρχει. Επειδή $p_K(x) \in K$, έχει κανείς ότι

$$\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 = \inf_{y \in K} \|x + te_i - y\|_2 \leq \|x + te_i - p_K(x)\|_2,$$

και επομένως ότι

$$\begin{aligned}
\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2 &\leq \|x + te_i - p_K(x)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2 \\
&= \frac{\|x + te_i - p_K(x)\|_2^2 - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{\|x - p_K(x) + te_i\|_2^2 - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{\|x - p_K(x)\|_2^2 + \|te_i\|_2^2 + 2\langle x - p_K(x), te_i \rangle - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{t^2 + 2t\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2},
\end{aligned}$$

αν επιπλέον $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ (οπότε $x \neq p_K(x)$). Από την άλλη, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και για $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ πάλι, παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
&\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2 \\
&= \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 \|x - p_K(x)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&\geq \frac{\langle x + te_i - p_K(x + te_i), x - p_K(x) \rangle - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{t\langle e_i, x - p_K(x) \rangle + \langle x - p_K(x + te_i), x - p_K(x) \rangle - \|x - p_K(x)\|_2^2}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{t\langle e_i, x - p_K(x) \rangle + \langle x - p_K(x + te_i), x - p_K(x) \rangle - \langle x - p_K(x), x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{t\langle e_i, x - p_K(x) \rangle + \langle x - p_K(x + te_i) - [x - p_K(x)], x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&= \frac{t\langle e_i, x - p_K(x) \rangle + \langle p_K(x) - p_K(x + te_i), x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} \\
&\geq \frac{t\langle e_i, x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2},
\end{aligned}$$

η τελευταία ανισότητα από την βασική ιδιότητα $\langle z - p_K(z), w - p_K(z) \rangle \leq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ και $w \in K$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο ανισότητες παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e_i, x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} &\leq \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} \\
&\leq \frac{t + 2\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2}
\end{aligned}$$

για $t > 0$, και

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e_i, x - p_K(x) \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} &\geq \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} \\
&\geq \frac{t + 2\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2}
\end{aligned}$$

για $t < 0$. Επειδή τώρα

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + 2\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} = \frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2},$$

έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} - \varepsilon \leq \frac{t + 2\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x + te_i - p_K(x)\|_2 + \|x - p_K(x)\|_2} \leq \frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} + \varepsilon$$

για $t \in (-\delta, \delta)$ και άρα τελικά ότι

$$\frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} - \varepsilon \leq \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} \leq \frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} + \varepsilon$$

για $t \in (-\delta, \delta)$. Έπεται ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + te_i - p_K(x + te_i)\|_2 - \|x - p_K(x)\|_2}{t} = \frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2}.$$

Τέλος, $\langle x - p_K(x), e_i \rangle$ είναι η i -συντεταγμένη του $x - p_K(x)$, οπότε

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|_2}.$$

(β) Από το (α)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\langle x - p_K(x), e_i \rangle}{\|x - p_K(x)\|_2} \quad i \in \{1, \dots, d\}, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

Επειδή η απεικόνιση $x \mapsto x - p_K(x)$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^d$, και οι συναρτήσεις νόρμα ($y \mapsto \|y\|_2$) και εσωτερικό γινόμενο ($y \mapsto \langle y, e_i \rangle$) είναι επίσης συνεχείς (ανισότητα Cauchy-Schwarz), οι συναρτήσεις $x \mapsto \langle x - p_K(x), e_i \rangle$ και $x \mapsto \|x - p_K(x)\|_2$ είναι συνεχείς, και άρα και το πηλίκο $x \mapsto \langle x - p_K(x), e_i \rangle / \|x - p_K(x)\|_2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $\mathbb{R}^d \setminus K$ που ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Επομένως οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^d \setminus K$ και άρα η f είναι (συνεχώς) διαφορίσιμη.

5. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό κυρτό σύνολο. Δείξτε ότι $\text{ext}(K) \subseteq \text{rb}(K)$, όπου, υπενθυμίζεται ότι, $\text{rb}(K) = \bar{K} \setminus \text{ri}(K)$ είναι το σχετικό σύνορο του K .

Λύση. Έστω $x \in \text{ext}(K)$. Αν $x \in \text{ri}(K)$, τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η ανοικτή σφαίρα $U_2(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\|_2 < r\}$ να ικανοποιεί την $U_2(x, r) \cap \text{aff}(K) \subseteq K$. Αν $y \in U_2(x, r) \cap \text{aff}(K)$, και άρα $y \in K$, τότε και $2x - y \in U_2(x, r) \cap \text{aff}(K)$, αφού $\|(2x - y) - x\|_2 = \|x - y\|_2 < r$, και επομένως $2x - y \in U_2(x, r)$, και $2x - y \in \text{aff}(K)$, αφού το $2x - y$ είναι αφφινικός συνδυασμός των σημείων x και y του K ($2, 1 \in \mathbb{R}$ και $2 - 1 = 1$). Τότε όμως $y, 2x - y \in K$ και $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x - y)$, δηλαδή $x \notin \text{ext}(K)$, που είναι αντίφαση φυσικά. Άρα $x \notin \text{ri}(K)$, και αφού $x \in \text{ext}(K) \subseteq K$, έπεται ότι $x \in K \setminus \text{ri}(K) = \bar{K} \setminus \text{ri}(K) = \text{rb}(K)$.

6. Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε το σύνορο του K δεν μπορεί να είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

[Υπόδειξη: Θεώρημα Minkowski.]

Λύση. Έστω K κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με μη κενό εσωτερικό $\text{int}(K)$. Από το Θεώρημα του Minkowski, $K = \text{conv}(\text{ext}(K))$. Επίσης, το ∂K είναι κλειστό και άρα συμπαγές, αφού είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K · αν ήταν και κυρτό, θα έπρεπε από το Θεώρημα του Minkowski και πάλι να ισχύει και ότι $\partial K = \text{conv}(\text{ext}(\partial K))$.

Από την προηγούμενη Άσκηση, $\text{ext}(K) \subseteq \partial K$ · αν το ∂K ήταν κυρτό, αυτό θα είχε σαν συνέπεια $\text{ext}(K) \subseteq \text{ext}(\partial K)$. Πράγματι, αν $x \in \text{ext}(K)$ τότε $x \in \partial K$, και αν το x γραφόταν ως $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ για κάποια $y, z \in \partial K$ με $y \neq z$ και $\lambda \in (0, 1)$, αν δηλαδή είχαμε $x \notin \text{ext}(\partial K)$, τότε επειδή y, z ανήκουν και στο K , θα είχαμε ότι $x \notin \text{ext}(K)$ επίσης.

Έπεται τώρα από τα παραπάνω ότι

$$K = \text{conv}(\text{ext}(K)) \subseteq \text{conv}(\text{ext}(\partial K)) = \partial K,$$

και άρα $K = \partial K$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή $\partial K = \bar{K} \setminus \text{int}(K) = K \setminus \text{int}(K)$ και $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

7. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Αν $S \subseteq K$ και $\text{conv}(S) = K$, τότε $\text{ext}(K) \subseteq S$. (Δηλαδή, στην περίπτωση που το K είναι και συμπαγές, το $\text{ext}(K)$ είναι το μικρότερο υποσύνολο του K του οποίου η κυρτή θήκη είναι το K).

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον χαρακτηρισμό $x \in \text{ext}(K)$ αν $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό, για $x \in K$.]

Λύση. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, και $S \subseteq K$ τέτοιο ώστε $\text{conv}(S) = K$. Έστω ότι υπάρχει $x \in \text{ext}(K) \setminus S$. Τότε, $K \setminus \{x\}$ εξακολουθεί να είναι κυρτό, αφού $x \in \text{ext}(K)$, και άρα

$$K \setminus \{x\} = \text{conv}(K \setminus \{x\}) \supseteq \text{conv}(S \setminus \{x\}) = \text{conv}(S) = K,$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο.

8. (Συνέχεια Άσκησης 1 του Φυλλαδίου) Αν K κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \dots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.

[Υπόδειξη: Υπερεπίπεδα στήριξης. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση που η αφθινική θήκη $\text{aff}(\{x_1, x_2, \dots\})$ των x_n , $n \in \mathbb{N}$, έχει διάσταση d .]

Λύση. Μπορούμε καταρχήν να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\lambda_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ · διαφορετικά κρατάμε μόνο τα n με $\lambda_n > 0$, και το x θα εξακολουθεί να είναι κυρτός συνδυασμός των εναπομεινάντων x_n . Αν δε τα n με $\lambda_n > 0$ είναι πεπερασμένα το πλήθος, τότε θα έχουμε τελειώσει γιατί το x θα είναι πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός σημείων του K και άρα θα ισχύει ότι $x \in K$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι $\lambda_n > 0$ για άπειρα n και ότι έχουμε κρατήσει μόνον αυτά.

Έστω πρώτα ότι $\text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d$. Από την Άσκηση 1 του Φυλλαδίου 1 γνωρίζουμε ότι $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \bar{K}$. Αν ήταν $x \in \partial K$, τότε επειδή

$$\text{aff}(K) \supset \text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d,$$

έχει κανείς ότι $x \in \text{rb}(K) = \partial K$, και άρα υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης του K στο x : υπάρχουν δηλαδή $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\langle u, x \rangle = c \quad \text{και} \quad \langle u, y \rangle \leq c \quad \forall y \in K.$$

Συγκεκριμένα, πρέπει $\langle u, x_n \rangle \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, και μάλιστα με γνήσια ανισότητα για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, επειδή υποθέτουμε ότι $\text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{R}^d$, και άρα το $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ εν μπορεί να περιέχεται στο υπερεπίπεδο $H(u, c) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle = c\}$, το οποίο έχει διάσταση $d - 1$. Τότε όμως

$$\langle x, u \rangle = \left\langle u, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, x_n \rangle < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c = c,$$

επειδή υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, και επειδή $\langle u, x_n \rangle \leq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\langle u, x_n \rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $x \in H(u, c)$, δηλαδή ότι $\langle u, x \rangle = c$. Άρα $x \notin \partial K$, και επομένως $x \in \text{int}(K) = \bar{K} \setminus \partial K$.

Στην γενική περίπτωση θεωρούμε το σύνολο $K' := K \cap \text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Το K' είναι κυρτό, τα x_n , $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στο K' και η αφινική τους θήκη είναι, εξ' ορισμού, η αφινική θήκη του K' . Από τα προηγούμενα, με το $\text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ στη θέση του $\mathbb{R}^d$ και το K' στη θέση του K , το x δεν μπορεί να ανήκει στο σχετικό σύνορο του K' μέσα στο $\text{aff}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ και άρα πρέπει $x \in K'$. Άρα $x \in K$, αφού $K' \subseteq K$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει την κυρτή θήκη

$$C := \text{conv}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$$

των x_n , $n \in \mathbb{N}$, και να εφαρμόσει το επιχείρημα της δεύτερης παραγράφου απευθείας στο C . Επειδή η κυρτή θήκη των x_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα x_n , έπεται ότι $C \subseteq K$, και άρα αρκεί να αποδείξει κανείς ότι $x \in C$. δηλαδή αρκεί τελικά να αποδειχθεί το ζητούμενο για $K = C$. Από την Άσκηση 1 του Φυλλαδίου 1 έχει κανείς ότι $x \in \bar{C}$. Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $x \in \bar{C} \setminus C$. Τότε, επειδή $\text{ri}(C) \subseteq C$, πρέπει $x \in \bar{C} \setminus \text{ri}(C) = \text{rb}(C)$, και άρα το C έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x : υπάρχουν δηλαδή $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(1) \quad \langle u, x \rangle = c,$$

$$(2) \quad \langle u, y \rangle \leq c \quad \forall y \in C,$$

$$(3) \quad \langle u, y \rangle < c \quad \text{για κάποιο } y \in C.$$

Έπεται ότι πρέπει $\langle u, x_n \rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, γιατί διαφορετικά θα είχε κανείς $\langle u, x_n \rangle = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, αφού η (2) ισχύει για $y = x_n$ για κάθε n , και επομένως και

$$\left\langle u, \sum_{n=1}^k t_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^k t_n \langle u, x_n \rangle = \sum_{n=1}^k t_n c = c$$

για κάθε κυρτό συνδυασμό $\sum_{n=1}^k t_n x_n$, $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^k t_n = 1$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή θα είχε κανείς ότι $\langle u, y \rangle = c$ για κάθε $y \in C$, που αντίκειται στην συνθήκη (3). Αφού τώρα $\langle u, x_n \rangle < c$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, πρέπει

$$\left\langle u, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, x_n \rangle < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c = c,$$

αφού υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, που αντίκειται στην συνθήκη (1). Άρα δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο υπερεπίπεδο στήριξης και άρα δεν μπορεί $x \in \text{rb}(C)$. επομένως πρέπει τελικά $x \in \text{ri}(C) \subseteq C$.

Ο κομψός αυτός τρόπος, που αποφεύγει αναφορά στην αφινική θήκη $\text{aff}(K)$ του K , υποδείχθηκε από τον κ. Καβάδια.

9. Το πολικό ενός μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο

$$A^0 := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in A\}.$$

(α) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυτόπου $P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ στον $\mathbb{R}^d$ είναι το πολύεδρο

$$P^0 = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}.$$

(β) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυέδρου $\Pi = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}$ στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, είναι το πολύτοπο $\Pi^0 = \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$.

[Υπόδειξη: $A^{00} := (A^0)^0 = \overline{\text{conv}(A \cup \{0\})}$ για οποιοδήποτε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^d$.]

Λύση. (α) Έστω $P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ ένα πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$, και έστω

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}.$$

Αν $y \in \Pi$ και $x \in P$, τότε $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ με $c_1, \dots, c_n \in [0, 1]$ και $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, και άρα

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i v_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, y \rangle \leq \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in P$, έπεται ότι $y \in P^0$ και αφού το $y \in \Pi$ ήταν αυθαίρετο έπεται ότι $\Pi \subseteq P^0$.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής. Αν $y \in P^0$, τότε πρέπει $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in P$, και άρα και για $x = v_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Έπεται ότι

$$y \in \left\{ z \in \mathbb{R}^d : \langle z, v_i \rangle \leq 1 \right\}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, και άρα $y \in \Pi$. Αφού το $y \in P^0$ ήταν αυθαίρετο έπεται ότι $P^0 \subseteq \Pi$, και άρα τελικά $P^0 = \Pi$.

(β) Έστω $\Pi = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}$ ένα πολυέδρο στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Έστω P το πολύτοπο $P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$. Από το (α) έχει κανείς ότι $P^o = \Pi \cdot$ άρα $\Pi^o = (P^o)^o = P^{oo}$. Όμως

$$P^{oo} = \overline{\text{conv}(P \cup \{0\})} = \overline{\text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})} = \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}),$$

και άρα $\Pi^o = \overline{\text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})}$.

Η ισότητα $\overline{\text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})} = \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ έπεται από το γεγονός ότι κάθε πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές σύνολο (κυρτή θήκη συμπαγούς = συμπαγές) και άρα κλειστό. Το γεγονός ότι $\text{conv}(P \cup \{0\}) = \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ το βλέπει κανείς ως εξής. Επειδή $\{0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq P \cup \{0\}$, έπεται ότι $\text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}) \subseteq \text{conv}(P \cup \{0\})$. Από την άλλη, επειδή $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \{0, v_1, \dots, v_n\}$ έπεται ότι

$$P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\}) \subseteq \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}).$$

Προφανώς $0 \in \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ επίσης, και επομένως

$$P \cup \{0\} \subseteq \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}).$$

Τέλος, αφού το σύνολο $\text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$ είναι κυρτό, πρέπει και

$$\text{conv}(P \cup \{0\}) \subseteq \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\}).$$

Εναλλακτικά, δοθέντος του πολυέδρου $\Pi = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}$, μπορεί κανείς εξ' αρχής να θέσει $Q := \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$. Τότε από το (α) πάλι,

$$Q^o = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v_i \rangle \leq 1 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, 0 \rangle \leq 1 \right\} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v_i \rangle \leq 1 \right\} = \Pi,$$

αφού $\langle x, 0 \rangle = 0$ και άρα $\langle x, 0 \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Έπεται τώρα ότι $\Pi^o = Q^{oo} = Q$, η δεύτερη ισότητα επειδή το Q είναι κυρτό, κλειστό και περιέχει το 0.