Κυρτή Ανάλυση (2015–2016) — Φυλλάδιο 5

1. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό.
(α) Δείξτε ότι $K^{ooo} = K^o$.
(β) Δείξτε ότι $[\mathrm{conv}(K)]^o = K^o$.
(γ) Έστω ότι το K είναι κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $[\mathrm{ext}(K)]^o = K^o$.
[A^o συμβολίζει το πολικό του A.]

2. Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι
$$(A \cap B)^o = \overline{\mathrm{conv}(A^o \cup B^o)}.$$

3. Έστω
$$S := \{(x_1, \dots, x_d) : x_1, \dots, x_d \in [0,1],\ x_1 + \cdots + x_d = 1\}.$$
Δείξτε ότι το S είναι κυρτό και βρείτε την συνάρτηση στήριξης h_S του S.

4. Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Αν
$$C = \mathrm{conv}(A \cup B)$$
δείξτε ότι
$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

5. Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι
$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

6. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.

7. Έστω $C \subset \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$, όπου, υπενθυμίζεται, το υποδιαφορικό μιας κυρτής $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ στο x είναι το σύνολο
$$\partial f(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d : f(y) \geqslant \langle v, y - x \rangle + f(x)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

8. Έστω $K=[0,1]$ και
$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \qquad n\in\mathbb{N}.$$
Δείξτε ότι $\delta(K_n,K)\to 0$ καθώς $n\to\infty$, όπου $\delta(A,B)$ η απόσταση Hausdorff των A και B.

9. Για μη κενά συμπαγή $A,B\subset\mathbb{R}^d$, η απόσταση Hausdorff ορίστηκε ως
$$\delta(A,B)=\inf\{t\in(0,\infty):\ A\subseteq B+tB_2(0,1) \text{ και } B\subseteq A+tB_2(0,1)\},$$
όπου $B_2(0,1)$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^d$. Έστω τώρα
$$\mathrm{dist}(x,C)=\inf\left\{\|x-y\|_2:\ y\in C\right\}$$
η συνήθης απόσταση του σημείου x από το σύνολο C, και έστω
$$D(A,B):=\sup_{x\in A}\mathrm{dist}(x,B),$$
και
$$\rho(A,B)=\max\{D(A,B),D(B,A)\},$$
για μη κενά συμπαγή $A,B\subset\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\delta(A,B)=\rho(A,B)$, για μη κενά συμπαγή $A,B\subset\mathbb{R}^d$.

10. (α) Έστω $K_1\supseteq K_2\supseteq\cdots$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $K_n\to\bigcap_{n=1}^\infty K_n$ στην μετρική Hausdorff.
(β) Έστω K_n, $n\in\mathbb{N}$ και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και έστω ότι $K_n\to K$ στην μετρική Hausdorff. Δείξτε ότι τότε $K=\bigcap_{n=1}^\infty\left(\overline{\bigcup_{m=n}^\infty K_m}\right)$.

11. (α) Αν K_n, C_n, $n\in\mathbb{N}$, και K, C, μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, και $K_n\to K$ και $C_n\to C$ στην μετρική Hausdorff, τότε $K_n+C_n\to K+C$.
(β) Αν K_n, $n\in\mathbb{N}$, και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $K_n\to K$, και αν a_n, $n\in\mathbb{N}$, και a πραγματικοί αριθμοί και $a_n\to a$, τότε $a_nK_n\to aK$ (οι συγκλίσεις στην μετρική Hausdorff).