**Κυρτή Ανάλυση (2015–2016)**
**Κάποιες Παρατηρήσεις**

**Κάθε Νόρμα Προκύπτει ως Συνάρτηση Στάθμης (Συναρτησοειδές Minkowski)** Έστω $X$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα· υποθέτουμε δηλαδή ότι ο $X$ έχει την δομή ενός διανυσματικού χώρου και είναι εφοδιασμένος με μία νόρμα $\| \ \|$. Έστω

$$K := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Το $K$ είναι τότε κυρτό και κλειστό, από τις ιδιότητες της νόρμας. Πράγματι, αν $x, y \in K$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leqslant \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| && \text{(τριγωνική ανισότητα)}\\
&\lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| && \text{(ομογένεια και } \lambda, 1-\lambda \geqslant 0)\\
&\leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1,
\end{aligned}$$

και άρα $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$· δηλαδή το $K$ είναι κυρτό. Επίσης, αν $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x \in X$, τότε $\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$, από την συνέχεια της νόρμας, και αφού $\|x_n\| \leqslant 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, πρέπει και $\|x\| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in K$· επομένως το $K$ είναι και κλειστό. Η συνέχεια της νόρμας είναι συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας: για $x, y \in X$, η τριγωνική ανισότητα δίνει ότι,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \qquad \text{και} \qquad \|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|,$$

και αυτές οι δύο μαζί δίνουν την ανισότητα

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|,$$

που δίνει άμεσα την συνέχεια της νόρμας. Τέλος, $0 \in \mathrm{int}(K)$, αφού

$$U(0, \tfrac{1}{2}) := \left\{x \in X : \|x\| < \tfrac{1}{2}\right\}$$

είναι μία ανοικτή περιοχή του 0 που περιέχεται στο $K$.

Το σύνολο $\{t > 0 : x \in tK\}$ είναι μη κενό για κάθε $x \in X$ και ισούται με το διάστημα $[\|x\|, \infty)$· πράγματι, για $t > 0$,

$$x \in tK \iff t^{-1}x \in K \iff \|t^{-1}x\| \leqslant 1 \iff t^{-1}\|x\| \leqslant 1 \iff \|x\| \leqslant t.$$

Έπεται ότι

$$g_K(x) = \inf\{t > 0 : x \in tK\} = \|x\|\cdot$$

δηλαδή η νόρμα $\| \ \|$ προκύπτει ως συνάρτηση στάθμης (συναρτησοειδές Minkowski) $g_K$ για κάποιο $K$ κλειστό κυρτό και με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Προφανώς το $K$ είναι και συμμετρικό:

$$x \in K \iff \|x\| \leqslant 1 \iff \|-x\| \leqslant 1 \iff -x \in K,$$

αφού για μια νόρμα έχουμε ότι $\|-x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$.

**Κάθε Νόρμα από Εσωτερικό Γινόμενο Προκύπτει ως Συνάρτηση Στήριξης** Έστω $X$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο· υποθέτουμε δηλαδή ότι ο $X$ έχει την δομή ενός διανυσματικού χώρου και είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$, το οποίο επάγει την νόρμα

$$\|x\|^2 := \langle x, x\rangle \qquad x \in X.$$

Έστω

$$B := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\},$$

και

$$K := \{y \in X : \langle x, y\rangle \leqslant 1\ \forall\, x \in B\} = \bigcap_{x\in B} \{y \in X : \langle x, y\rangle \leqslant 1\}\cdot$$

το $K$ είναι κυρτό και κλειστό ως τομή κλειστών ημιχώρων. Ότι κάθε ημίχωρος

$$H^-(x,1) := \{y \in X : \langle x, y\rangle \leqslant 1\}$$

είναι κυρτό είναι άμεσο: αν $y_1, y_2$ είναι στοιχεία αυτού του ημιχώρου, δηλαδή αν $\langle y_1, x\rangle \leqslant 1$ και $\langle y_2, x\rangle \leqslant 1$, και αν $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$\langle \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, x\rangle = \lambda\langle y_1, x\rangle + (1-\lambda)\langle y_2, x\rangle \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

και άρα $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ ανήκει επίσης στον ημίχωρο $H^-(x,1)$. Ότι κάθε ημίχωρος $H^-(x,1)$ είναι κλειστό είναι επίσης άμεσο: αν $y_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μία ακολουθία στον ημίχωρο $H^-(x,1)$, αν δηλαδή $\langle x, y_n\rangle \leqslant 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle \leqslant 1,$$

από την συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, και άρα $y$ ανήκει επίσης στον ημίχωρο $H^-(x,1)$· το ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση έπεται άμεσα από την ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$|\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x, y_n - y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y_n - y\| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0.$$

Τέλος, το $K$ είναι επίσης φραγμένο: αν $y \in K$, και $y \neq 0$, τότε επειδή $x := y/\|y\| \in B$, πρέπει

$$1 \geqslant \langle x, y\rangle = \frac{1}{\|y\|}\langle y, y\rangle = \|y\|.$$

Έστω τώρα

$$h_K(x) := \sup_{y\in K}\langle x, y\rangle \qquad x \in X,$$

η συνάρτηση στήριξης του $K$· η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη γιατί, για $x \in B$ έχει κανείς ότι $\langle x, y\rangle \leqslant 1$ για κάθε $y \in K$, και άρα το σύνολο $\{\langle x, y\rangle : y \in K\}$ έχει άνω φράγμα το 1 και επομένως έχει καλά ορισμένο supremum $h_K(x)$, και $h_K(x) \leqslant 1$, για $x \in B$. Για αυθαίρετο $x \neq 0$ γράφει κανείς

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, y \right\rangle \leqslant \|x\| \cdot 1 = \|x\| \qquad \forall\, y \in K,$$

αφού $x/\|x\| \in B$, και άρα το σύνολο $\{\langle x,y\rangle\colon y\in K\}$ έχει άνω φράγμα το $\|x\|$ και επομένως έχει καλά ορισμένο supremum $h_K(x)$, και $h_K(x)\leqslant \|x\|$. Για $x=0$ προφανώς $h_K(0)=0$ αφού $\langle x,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0$ για κάθε $y$.

Αν τώρα $x\in B$, τότε

$$\langle x,y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|\leqslant 1 \qquad \forall\, y\in B,$$

και άρα $x\in K$· έπεται ότι $h_K(x)\geqslant\langle x,x\rangle=\|x\|^2=1=\|x\|$. Για αυθαίρετο $x\in X$, γράφει κανείς $x':=x/\|x\|$ και τότε $x'\in B$ και άρα

$$\langle x',y\rangle \leqslant \|x'\|\|y\|\leqslant 1 \qquad \forall\, y\in B\cdot$$

επομένως $x'\in K$, και άρα

$$h_K(x)\geqslant\langle x,x'\rangle=\langle x,x\rangle\frac{1}{\|x\|}=\|x\|.$$

Αποδείχθηκε δηλαδή ότι $h_K(x)=\|x\|$ για κάθε $x\in X$. Η νόρμα $\|\ \|$ προκύπτει δηλαδή σαν συνάρτηση στήριξης $h_K$ με το $K$ κυρτό, κλειστό και φραγμένο. Το $K$ είναι επίσης συμμετρικό γιατί η σφαίρα $B$ είναι συμμετρική: αν $y\in K$, τότε $\langle x,y\rangle\leqslant 1\ \forall\, x\in B$, και άρα

$$\langle x,-y\rangle=\langle -x,y\rangle\leqslant 1 \qquad \forall x\in B,$$

αφού $x\in B\Rightarrow -x\in B$· έπεται ότι $-y\in K$. Τέλος, παρατηρεί κανείς επίσης ότι το sup στον ορισμό της $h_K$ είναι max εν προκειμένω: $h_K(x)=\langle x,y\rangle$ για $y:=x/\|x\|\in K$, για κάθε $x\in X$.

**Κάποια Πολικά** Έστω $K=\mathrm{conv}(\{v_1,\ldots,v_n\})$ ένα πολύτοπο· σύμφωνα με την Άσκηση 9 του 4ου Φυλλαδίου, το πολικό του $K$ είναι το πολύεδρο

$$K^{\mathrm{o}}=\bigcap_{i=1}^{n}\left\{x\in\mathbb{R}^d\colon \langle x,v_i\rangle\leqslant 1\right\}.$$

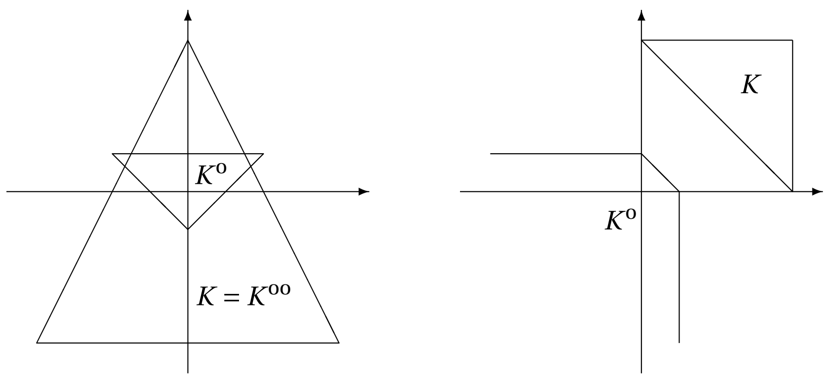
Το σύνολο $\left\{x\in\mathbb{R}^d\colon\langle x,v_i\rangle=1\right\}=:H(v_i,1)$ είναι το υπερεπίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $v_i$ και σε απόσταση $1/\|v_i\|$ από την αρχή των αξόνων· πράγματι, το σημείο $x=v_i/\|v_i\|^2$ ανήκει στο $H(v_i,1)$ και η νόρμα του (δηλαδή η απόστασή του από την αρχή των αξόνων 0) είναι $1/\|v_i\|$, ενώ κάθε άλλο σημείο του $H(v_i,1)$ έχει νόρμα (δηλαδή απέχει από την αρχή των αξόνων)

$$\begin{aligned}
\|x\|^2&=\left\|x-\frac{v_i}{\|v_i\|^2}+\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\|^2\\
&=\left\|x-\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\|^2+\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\|^2+2\left\langle x-\frac{v_i}{\|v_i\|^2},\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\rangle\\
&\geqslant\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\|^2+2\left\langle x-\frac{v_i}{\|v_i\|^2},\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\rangle\\
&=2\left\langle x,\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\rangle-\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right\|^2\\
&=2\langle x,v_i\rangle\frac{1}{\|v_i\|^2}-\frac{1}{\|v_i\|^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\|v_i\|^2} - \frac{1}{\|v_i\|^2} \qquad\qquad (\text{αφού } \langle x, v_i\rangle = 1 \text{ για } x \in H(v_i,1)) \\
&= \frac{1}{\|v_i\|^2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως το πολικό του πολυτόπου $K$ είναι ένα πολύεδρο με έδρες υπερεπίπεδα $H(v_i,1)$ κάθετα στα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές $v_i$ με την αρχή των αξόνων και σε απόσταση $1/\|v_i\|$ από την αρχή των αξόνων. Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τότε το πολύεδρο $K^{\mathrm{o}}$ είναι φραγμένο και άρα είναι επίσης πολύτοπο.

Για παράδειγμα, στις δύο διαστάσεις $d = 2$, το τρίγωνο με κορυφές $(0,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$ έχει για πολικό το τρίγωνο που φράσσεται από τις ευθείες $2y = 1$, $-2x-2y = 1$, $2x-2y = 1$, που είναι το τρίγωνο με κορυφές $(-1,\frac{1}{2})$, $(1,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{2})$, ενώ το τρίγωνο με κορυφές $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων 0, έχει για πολικό το μη φραγμένο πολύεδρο που φράσσεται από τις ευθείες $2y = 1$, $2x = 1$, $2x+2y = 1$ και περιέχει το 0. Σημειωτέον ότι το $K^{\mathrm{oo}}$ στην τελευταία περίπτωση δεν είναι το τρίγωνο $K$, αλλά το τετράγωνο $\mathrm{conv}(\{(0,0)\} \cup K)$.




Μερικά ακόμη παραδείγματα. Το πολικό της ευκλείδειας σφαίρας $B_2(0,r)$, με κέντρο το 0 και ακτίνα $r > 0$, είναι η ευκλείδεια σφαίρα $B_2(0,1/r)$, με κέντρο το 0 και ακτίνα $1/r$. Το πολικό της $\ell^1$ σφαίρας

$$B_1(0,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leqslant r \right\}$$

με κέντρο το 0 και ακτίνα $r > 0$ είναι η $\ell^\infty$ σφαίρα

$$B_\infty(0,1/r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x_i| \leqslant \frac{1}{r} \ \forall\, i \in \{1,\dots,d\} \right\},$$

με κέντρο το 0 και ακτίνα $1/r$, και αντιστρόφως. Για $p \in (1,\infty)$, το πολικό της $\ell^p$ σφαίρας

$$B_p(0,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \leqslant r^p \right\}$$

με κέντρο το 0 και ακτίνα $r > 0$ είναι η $\ell^q$ σφαίρα

$$B_q(0, 1/r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} |x_i|^q \leqslant \frac{1}{r^q} \right\},$$

με κέντρο το 0 και ακτίνα $1/r$, και αντιστρόφως, όπου $q \in (1, +\infty)$ ο συζυγής εκθέτης: $p^{-1} + q^{-1} = 1$.