

Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 1

1. Αν K κυρτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \dots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.
2. Έστω $S = S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1\}$ η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ του S είναι η μοναδιαία σφαίρα

$$B_2(0, 1) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1\right\}.$$

3. Έστω $e_1, \dots, e_d$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$\text{conv}(\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}) = B_1(0, 1),$$

$$\text{όπου } B_1(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1\}.$$

4. Για μία συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^d$, το επιγράφημα της f ορίζεται ως

$$\text{epigr}(f) := \{(x, t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Δείξτε ότι το K είναι κυρτό σύνολο και η f κυρτή συνάρτηση ανν $\text{epigr}(f)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$.

5. Έστω $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν $x_0 \in K$ είναι τοπικό ελάχιστο της f , τότε είναι και ολικό ελάχιστο.
6. Έστω $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, όπου K κυρτό μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν η f έχει μέγιστο στο K τότε είναι σταθερή.
7. Για $p \in (0, +\infty)$, ορίζουμε

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Επίσης ορίζουμε

$$\|x\|_{\infty} := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i| \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

- (i) Δείξτε ότι για $p \in [1, +\infty]$, η $x \mapsto \|x\|_p$ είναι νόρμα.
- (ii) Για $p \in [1, +\infty]$, οι μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leq 1\}$ είναι κυρτά σύνολα.
- (iii) Είναι οι $x \mapsto \|x\|_p$ νόρμες για $p \in (0, 1)$;
[Υπόδειξη: Είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες σφαίρες $B_p(0, 1)$ κυρτές για $p \in (0, 1)$];
- (iv) Δείξτε ότι για $1 \leq p < q \leq +\infty$,

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq d^{1/p-1/q} \|x\|_q \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

8. (Η ανισότητα Hölder.)

(α) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα Riemann.) Αν $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες και ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις, και αν $p, q > 1$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$, τότε

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

(β) (Εκδοχή για το ολοκλήρωμα ως προς κάποιο μέτρο.) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, και αν $p, q > 1$ ικανοποιούν την $p^{-1} + q^{-1} = 1$, τότε $\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}$.

9. Η συνάρτηση Γ ορίζεται για $x > 0$ από την $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

(i) Δείξτε ότι το $\Gamma(x)$ είναι καλά ορισμένο για $x > 0$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ για $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ για $x > 0$.

(v) Η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλαδή η $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ είναι κυρτή.

[Υπόδειξη: Μία συνάρτηση $f: K \rightarrow (0, +\infty)$ είναι λογαριθμικά κυρτή αν

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda} \quad x, y \in K, \lambda \in [0, 1].$$

(vi) Η συνάρτηση Γ είναι κυρτή.