

Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 2

1. Έστω K ανοικτό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Για $i \in \{1, \dots, d\}$ και $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ έστω

$$K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} := \{x \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in K\}$$

και $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} : K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}(x) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Δείξτε ότι το $K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ είναι ανοικτό διάστημα και η $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ κυρτή συνάρτηση.

2. Έστω K κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο στάθμης $F_r := \{x \in K : f(x) \leq r\}$ είναι, για κάθε $r \in \mathbb{R}$, κυρτό (πιθανώς κενό). Δείξτε επίσης με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει· υπάρχει δηλαδή συνάρτηση f για την οποία το F_r είναι κυρτό για κάθε $r \in \mathbb{R}$, αλλά η f δεν είναι κυρτή.
3. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και μη κενό και $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι αν $f: K \rightarrow [0, \infty)$ κυρτή, τότε $x \mapsto [f(x)]^n$ είναι κυρτή.

(β) Δείξτε με (αντιπαράδειγμα) ότι το (α) δεν ισχύει εν γένει αν παραληφθεί η υπόθεση $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in K$.

4. Ένα κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^d$ με τουλάχιστον δύο σημεία λέγεται κυρτός κώνος με κορυφή την αρχή των αξόνων αν $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K \ \forall \lambda \in [0, \infty)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός· μία συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένη σε έναν κυρτό κώνο K , λέγεται ομογενής βαθμού n αν $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ για κάθε $x \in K$ και $\lambda \geq 0$. Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή και ομογενής βαθμού n , και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η συνάρτηση $x \mapsto [f(x)]^{1/n}$ είναι κυρτή.

5. Δείξτε ότι μία συνεχής συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα μη κενό κυρτό $K \subseteq \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή αν $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ για κάθε $x, y \in K$.

(Σημείωση: αυτό δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας της f .)

6. (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.) Έστω $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ σημεία του $\mathbb{R}^2$, με τουλάχιστον δύο x_i διάφορα μεταξύ τους. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία $y = ax + b$ «σε ελάχιστη απόσταση» από τα σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ · δηλαδή δείξτε ότι η $\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$ έχει μοναδικό ολικό ελάχιστο ως προς a, b .

7. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $x \in K$ και $u \in \mathbb{R}^d$, το όριο

$$D_u^+ f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

υπάρχει.

- (β) Για $x \in K$ σταθερό, η συνάρτηση $G_x(u) := D_u^+ f(x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, είναι κυρτή και θετικά ομογενής (δηλαδή $G_x(\lambda u) = \lambda G_x(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda \geq 0$).
- (γ) Για $x \in K$ σταθερό, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \forall u \in \mathbb{R}^d$.
- (δ) Αν $\partial f(x)$ το υποδιαφορικό της f στο x , τότε

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : D_u^+ f(x) \geq \langle v, u \rangle \forall u \in \mathbb{R}^d\}.$$

- (ε) Δείξτε επίσης ότι $D_u^+ f(x) \geq D_u^- f(x)$, όπου $D^- f(x) := -D^+ f_{-u}(x)$, για κάθε $x \in K$. (Η κατ'ακατεύθυνση παράγωγος $D_u^- f(x)$ της f στο x υπάρχει όταν $D_u^+ f(x) = D_u^- f(x)$.)
8. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και ανοικτό, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, και $x \in K$. Δείξτε ότι το υποδιαφορικό $\partial f(x)$ της f στο x είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
9. (α) Βρείτε το υποδιαφορικό $\partial f(0)$ της συνάρτησης $f(x) := \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$, στο 0.
 (β) Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) := \|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^d$.
 [Υπενθύμιση: $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$ για $x \in \mathbb{R}^d$ και $p > 0$, και $\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|$.]
10. Έστω K μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι κυρτή ανν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K.$$