

Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 3

1. Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι κάθε

$$x \in \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$$

γράφεται μονοσήμαντα σαν κυρτός συνδυασμός των x_i , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Δείξτε ότι τότε τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφρινικά ανεξάρτητα.

2. (α) Έστω A μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\text{conv}(A)$ είναι επίσης ανοικτό.
 (β) Δώστε παράδειγμα κλειστού συνόλου στον $\mathbb{R}^2$ του οποίου η κυρτή θήκη δεν είναι κλειστό σύνολο.
3. (α) Έστω S μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα S και $\text{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.
 (β) Έστω S_1 και S_2 μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι

$$\text{conv}(S_1 + S_2) = \text{conv}(S_1) + \text{conv}(S_2).$$

Υπενθυμίζεται ότι, για $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\text{conv}(S^\circ) \subseteq (\text{conv}(S))^\circ$, όπου A° συμβολίζει το εσωτερικό του A για ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ισχύει πάντα ισότητα;
 [Υπόδειξη: αν $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, τότε και $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_i \mu_j) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)(\sum_{j=1}^m \mu_j) = 1 \cdot 1 = 1.$]

4. Έστω $\delta > 0$, $m, d \in \mathbb{N}$ με $m > d$, και $K_1, \dots, K_m$ μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, με την ιδιότητα ότι για κάθε οικογένεια $d+1$ από τα K_i , δηλαδή για κάθε $1 \leq i_1 < \dots < i_{d+1} \leq m$, υπάρχει σημείο $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από κάθε K_{i_j} είναι $\leq \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_{i_j}) \leq \delta$ για κάθε $j \in \{1, \dots, d+1\}$. Δείξτε ότι τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ του οποίου η απόσταση από όλα τα K_i είναι $\leq \delta$, δηλαδή τέτοιο ώστε $d(x, K_i) \leq \delta$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$.
5. (α) Έστω K μη κενό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $x \in \text{ri}(K)$ ανν για κάθε $y \in K \setminus \{x\}$ υπάρχει $\mu > 1$ τέτοιο ώστε $\mu x + (1 - \mu)y \in K$.
 (β) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (α) ότι, αν $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφρινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$ και $S := \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ το αντίστοιχο k -simplex, τότε

$$\text{ri}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0, 1), \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}.$$

6. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό και κυρτό. Δείξτε ότι:

(α) $\text{aff}(K) = \text{aff}(\overline{K}) = \text{aff}(\text{ri}(K))$.

(β) $\text{ri}(K) = \text{ri}(\overline{K}) = \text{ri}(\text{ri}(K))$.

(γ) $\text{rb}(K) = \text{rb}(\overline{K}) = \text{rb}(\text{ri}(K))$.

7. (α) Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $\text{ri}(K_1 \cap K_2) = \text{ri}(K_1) \cap \text{ri}(K_2)$.
 (β) Έστω $K_i, i \in I$, οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε $\bigcap_{i \in I} \text{ri}(K_i) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $\overline{\bigcap_{i \in I} K_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{K_i}$.

8. Έστω $S = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\})$ ένα d -simplex στον $\mathbb{R}^d$ και έστω $y \in S^\circ$. Δείξτε ότι τα

$$S_i = \text{conv}([\{x_0, x_1, \dots, x_d\} \setminus \{x_i\}] \cup \{y\}) \quad i \in \{1, \dots, d\},$$

είναι d -simplices, έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και $S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_d$.

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$, μη κενό. Δείξτε ότι

$$\overline{\text{conv}(S)} = \bigcap \{K \subseteq \mathbb{R}^d : K \supseteq S, K \text{ κλειστό και κυρτό}\}.$$

10. (α) Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

ένα πολυώνυμο, με $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Δείξτε ότι οι ρίζες της παραγώγου P' του P περιέχονται στην κυρτή θήκη των ριζών του P .

(β) Έστω $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, και έστω $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του P . Δείξτε ότι η διάμετρος του συνόλου $\{z_1, \dots, z_4\}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\text{diam}(\{z_1, \dots, z_4\}) \geq \sqrt{\left| \frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} \right|}.$$

[Υπόδειξη: Αν $z_1, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του P στο (α), το P γράφεται σαν $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $1/z = z/|z|^2$ για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z .]