

Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 4

1. Έστω K μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι αν

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|_2 = \|x - y\|_2 \quad (1)$$

για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε $x - p_K(x) = y - p_K(y)$. Αν η (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, τι συμπεραίνει κανείς για το K ;

2. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.
(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.
3. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που δεν διαχωρίζονται γνήσια;
(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων, μη κενών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που διαχωρίζονται γνήσια αλλά όχι αυστηρά;
4. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό, κλειστό και κυρτό, και έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ η συνάρτηση $f(x) := \text{dist}(x, K)$, όπου $\text{dist}(x, K) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in K\}$.
(α) Δείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|_2} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^d \setminus K$.

5. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό κυρτό σύνολο. Δείξτε ότι $\text{ext}(K) \subseteq \text{rb}(K)$, όπου, υπενθυμίζεται ότι, $\text{rb}(K) = K \setminus \text{ri}(K)$ είναι το σχετικό σύνορο του K .
6. Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε το σύνορο του K δεν μπορεί να είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
[Υπόδειξη: Θεώρημα Minkowski.]
7. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Αν $S \subseteq K$ και $\text{conv}(S) = K$, τότε $\text{ext}(K) \subseteq S$. (Δηλαδή, στην περίπτωση που το K είναι και συμπαγές, το $\text{ext}(K)$ είναι το μικρότερο υποσύνολο του K του οποίου η κυρτή θήκη είναι το K).
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον χαρακτηρισμό $x \in \text{ext}(K)$ αν $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό, για $x \in K$.]
8. (Συνέχεια Άσκησης 1 1ου Φυλλαδίου) Αν K κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, \dots \in K$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = 1$, και ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $x \in K$.
[Υπόδειξη: Υπερεπίπεδα στήριξης. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση που η αφφινική θήκη $\text{aff}(\{x_1, x_2, \dots\})$ των x_n , $n \in \mathbb{N}$, έχει διάσταση d .]

9. Το πολικό ενός μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο

$$A^\circ := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in A\}.$$

(α) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυτόπου $P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ στον $\mathbb{R}^d$ είναι το πολυέδρο

$$P^\circ = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}.$$

(β) Δείξτε ότι το πολικό ενός πολυέδρου $P = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v_i \rangle \leq 1\}$ στον $\mathbb{R}^d$, όπου $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, είναι το πολύτοπο $P^\circ = \text{conv}(\{0, v_1, \dots, v_n\})$.

[Υπόδειξη: $A^{\circ\circ} := (A^\circ)^\circ = \overline{\text{conv}(A \cup \{0\})}$ για οποιοδήποτε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^d$.]