

Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 5

1. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό.
(α) Δείξτε ότι $K^{\circ\circ\circ} = K^\circ$.
(β) Δείξτε ότι $[\text{conv}(K)]^\circ = K^\circ$.
(γ) Έστω ότι το K είναι κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $[\text{ext}(K)]^\circ = K^\circ$.
[A° συμβολίζει το πολικό του A .]

2. Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι

$$(A \cap B)^\circ = \overline{\text{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

3. Έστω

$$S := \{(x_1, \dots, x_d) : x_1, \dots, x_d \in [0, 1], x_1 + \dots + x_d = 1\}.$$

Δείξτε ότι το S είναι κυρτό και βρείτε την συνάρτηση στήριξης h_S του S .

4. Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Αν

$$C = \text{conv}(A \cup B)$$

δείξτε ότι

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

5. Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι

$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

6. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.

7. Έστω $C \subset \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$, όπου, υπενθυμίζεται, το υποδιαφορικό μιας κυρτής $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ στο x είναι το σύνολο

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : f(y) \geq \langle v, y - x \rangle + f(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d\}.$$

8. Έστω $K = [0, 1]$ και

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right] \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\delta(K_n, K) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, όπου $\delta(A, B)$ η απόσταση Hausdorff των A και B .

9. Για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$, η απόσταση Hausdorff ορίστηκε ως

$$\delta(A, B) = \inf \{t \in (0, \infty) : A \subseteq B + tB_2(0, 1) \text{ και } B \subseteq A + tB_2(0, 1)\},$$

όπου $B_2(0, 1)$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^d$. Έστω τώρα

$$\text{dist}(x, C) = \inf \{\|x - y\|_2 : y \in C\}$$

η συνήθης απόσταση του σημείου x από το σύνολο C , και έστω

$$D(A, B) := \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B),$$

και

$$\rho(A, B) = \max \{D(A, B), D(B, A)\},$$

για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\delta(A, B) = \rho(A, B)$, για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

10. Έστω $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $K_n \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ στην μετρική Hausdorff.
11. Έστω $K_n, n \in \mathbb{N}$ και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και έστω ότι $K_n \rightarrow K$ στην μετρική Hausdorff. Δείξτε ότι τότε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m} \right)$.
12. (α) Αν $K_n, C_n, n \in \mathbb{N}$, και K, C , μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, και $K_n \rightarrow K$ και $C_n \rightarrow C$ στην μετρική Hausdorff, τότε $K_n + C_n \rightarrow K + C$.
 (β) Αν $K_n, n \in \mathbb{N}$, και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $K_n \rightarrow K$, και αν $a_n, n \in \mathbb{N}$, και a πραγματικοί αριθμοί και $a_n \rightarrow a$, τότε $a_n K_n \rightarrow aK$ (οι συγχλίσεις στην μετρική Hausdorff).