Κυρτή Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2019–2020
Φυλλάδιο 5

1. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό.
(α) Δείξτε ότι $K^{\circ\circ\circ} = K^{\circ}$.
(β) Δείξτε ότι $[\mathrm{conv}(K)]^{\circ} = K^{\circ}$.
(γ) Έστω ότι το K είναι κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $[\mathrm{ext}(K)]^{\circ} = K^{\circ}$.
[A° συμβολίζει το πολικό του A.]

Λύση. (α) Από Θεώρημα,

$$K^{\circ\circ\circ} = (K^{\circ})^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(K^{\circ} \cup \{0\})}.$$

Όμως το K° περιέχει πάντα το 0, αφού $\langle 0, x\rangle = 0 \leqslant 1 \ \forall\, x \in K$, είναι πάντα κυρτό και πάντα κλειστό. Άρα έχει κανείς διαδοχικά ότι

$$\overline{\mathrm{conv}(K^{\circ} \cup \{0\})} = \overline{\mathrm{conv}(K^{\circ})} = \overline{K^{\circ}} = K^{\circ}.$$

(β) Αφού $K \subseteq \mathrm{conv}\, K$, έπεται άμεσα ότι $[\mathrm{conv}(K)]^{\circ} \subseteq K^{\circ}$. Από την άλλη, αν $y \in K^{\circ}$, και $x_1, \dots, x_n \in K$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ είναι τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, τότε

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, y\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

αφού $x_i \in K \Rightarrow \langle x_i, y\rangle \leqslant 1$, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, εξ ορισμού του $y \in K^{\circ}$. Αφού το $\mathrm{conv}(K)$ αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του K, αυτό δείχνει ότι $y \in K^{\circ}$. Επομένως $K^{\circ} \subseteq [\mathrm{conv}(K)]^{\circ}$ επίσης.
(γ) Από το Θεώρημα του Minkowski, $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$. Από το (β) λοιπόν έπεται ότι

$$[\mathrm{ext}(K)]^{\circ} = [\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))]^{\circ} = K^{\circ}.$$

□

2. Έστω A και B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι

$$(A \cap B)^{\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ})}.$$

Λύση. Από τον ορισμό του πολικού έχει κανείς άμεσα ότι $(A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$, για αυθαίρετα μη κενά σύνολα A και B· πράγματι

$$y \in (A \cup B)^{\circ} \iff \langle y, x\rangle \leqslant 1 \quad \forall\, x \in A \cup B \iff y \in A^{\circ} \cap B^{\circ}.$$

Από Θεώρημα, και αφού κάθε πολικό περιέχει το 0,

$$\overline{\mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ})} = \overline{\mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ} \cup \{0\})} = (A^{\circ} \cup B^{\circ})^{\circ\circ}. \tag{1}$$

Αν τα A και B είναι κυρτά, κλειστά και περιέχουν το μηδέν, τότε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
(A^{\circ} \cup B^{\circ})^{\circ} = A^{\circ\circ} \cap B^{\circ\circ} &= \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})} \cap \overline{\mathrm{conv}(B \cup \{0\})} \\
&= \overline{\mathrm{conv}(A)} \cap \overline{\mathrm{conv}(B)} && (\text{επειδή } 0 \in A \cap B) \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} && (\text{επειδή } A \text{ και } B \text{ κυρτά}) \\
&= A \cap B && (\text{επειδή } A \text{ και } B \text{ κλειστά}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο. □

3. Έστω

$$S := \{(x_1, \dots, x_d) \colon x_1, \dots, x_d \in [0,1],\ x_1 + \dots + x_d = 1\}.$$

Δείξτε ότι το S είναι κυρτό και βρείτε την συνάρτηση στήριξης h_S του S.

Λύση. Η κυρτότητα είναι άμεση, απλά ελέγχει κανείς τον ορισμό. Αν $(x_1, \dots, x_d)$ και $(y_1, \dots, y_d)$ στοιχεία του S και $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$\lambda(x_1, \dots, x_d) + (1-\lambda)(y_1, \dots, y_d) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \dots, \lambda x_d + (1-\lambda)y_d),$$

και επειδή το $[0,1]$ είναι κυρτό έπεται ότι $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i \in [0,1]$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$· επιπλέον,

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda x_i + (1-\lambda)y_i] = \lambda \sum_{i=1}^{d} x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{d} y_i = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

και επομένως τελικά $\lambda(x_1, \dots, x_d) + (1-\lambda)(y_1, \dots, y_d) \in S$.

Έστω τώρα $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Αν $x = (x_1, \dots, x_d) \in S$, τότε επειδή $x_i \geqslant 0$ και $y_i \leqslant \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$, έπεται ότι

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \leqslant \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j \sum_{i=1}^{d} x_i = \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j.$$

Άρα

$$h_S(y) = \max_{x \in S} \langle x, y \rangle \leqslant \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j.$$

Από την άλλη, έστω $i \in \{1, \dots, d\}$ τέτοιο ώστε $y_i = \max\limits_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j$· τότε, αν θέσει κανείς $x_i = 1$ και $x_j = 0$ για $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$, και $x = (x_1, \dots, x_d)$, τότε $x \in S$, και άρα

$$h_S(y) \geqslant \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j = y_i = \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j.$$

Τελικά δηλαδή

$$h_S(y) = \max_{j \in \{1,\dots,d\}} y_j \qquad\qquad y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Ένας πιο συστηματικός τρόπος για να βρίσκει κανείς το $h_S(y)$ είναι ο εξής. Για σταθερό $y \in \mathbb{R}^d$, η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική και άρα κυρτή και συνεχής· εμφανίζει επομένως το μέγιστό της στο κυρτό και συμπαγές[1] σύνολο S σε ένα ακραίο σημείο του S. Τα ακραία σημεία του συγκεκριμένου S είναι τα σημεία $\mathrm{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, όπου το 1 είναι στην θέση i, $i \in \{1, \dots, d\}$, δηλαδή η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^d$ (γιατί;), και επειδή $\langle \mathrm{e}_i, y \rangle = y_i$, έχει κανείς ότι

$$h_S(y) = \max_{x \in S} \langle x, y \rangle = \max_{x \in \mathrm{ext}(S)} \langle x, y \rangle = \max_{i \in \{1,\dots,d\}} \langle \mathrm{e}_i, y \rangle = \max_{i \in \{1,\dots,d\}} y_i. \qquad \square$$

[1] Το S είναι φραγμένο γιατί για $x = (x_1, \dots, x_d) \in S$, $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^d x_i = 1$, αφού $x_i \in [0,1]$ και άρα $x_i^2 \leqslant x_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$. Επίσης, αν $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία το S, με $x(n) = (x_1(n), \dots, x_d(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $(x_1(n), \dots, x_d(n)) \to (x_1, \dots, x_d)$, τότε $x_i(n) \to x_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$, και άρα $x_i = \lim_{n \to \infty} x_i(n) \in [0,1]$ για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$, και $\sum_{i=1}^d x_i = \sum_{i=1}^d \lim_{n \to \infty} x_i(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^d x_i(n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$ και επομένως $x \in S$. Αυτό δείχνει ότι το S είναι επίσης κλειστό.

4. Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Αν

$$C = \mathrm{conv}(A \cup B)$$

δείξτε ότι

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Λύση. Επειδή $A \subseteq A \cup B \subseteq \mathrm{conv}(A \cup B) = C$ και $B \subseteq A \cup B \subseteq \mathrm{conv}(A \cup B) = C$, έπεται άμεσα από σχετική ιδιότητα της συνάρτησης στήριξης ότι $h_C(x) \geqslant h_A(x)$ και $h_C(x) \geqslant h_B(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, και άρα

$$h_C(x) \geqslant \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Από την άλλη, έστω $x \in \mathbb{R}^d$ και $y \in A \cup B$. Τότε, είτε $y \in A$ οπότε

$$\langle x, y \rangle \leqslant \max_{z \in A} \langle x, z \rangle = h_A(x),$$

είτε $y \in B$ οπότε, ανάλογα, $\langle x, y \rangle \leqslant h_B(x)$· σε κάθε περίπτωση,

$$\langle x, y \rangle \leqslant \max\{h_A(x), h_B(x)\}.$$

Αν τώρα $y \in \mathrm{conv}(A \cup B)$, τότε υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in A \cup B$ και $c_1, \ldots, c_n \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, και τότε

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n c_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle x, y_i \rangle \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \max\{h_A(x), h_B(x)\} = \max\{h_A(x), h_B(x)\}.$$

Άρα τελικά

$$\langle x, y \rangle \leqslant \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A \cup B) = C$ και επομένως

$$h_C(x) \leqslant \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

επίσης. Δηλαδή τελικά $h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$. □

5. Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ δείξτε ότι

$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Λύση. Μπορεί κανείς να δώσει απευθείας απόδειξη, όμως εδώ θα δοθεί απόδειξη με χρήση δυϊσμού. Επειδή τα A και B είναι κυρτά, κλειστά και $0 \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$, έχει κανείς ότι το $A \cap B$ είναι κλειστό, κυρτό και $0 \in \mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Έπεται ότι

$$g_{A \cap B} = h_{(A \cap B)^\circ}. \tag{3}$$

Επειδή πολικά σύνολα είναι πάντα κλειστά, και επειδή τα A και B περιέχουν το 0 σαν εσωτερικό σημείο και άρα τα πολικά τους είναι φραγμένα, τα A° και B° είναι κλειστά και φραγμένα, δηλαδή συμπαγή· επομένως το $A^{\circ} \cup B^{\circ}$ είναι συμπαγές και κατά συνέπεια και το $\mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ})$. Επομένως, από την Άσκηση 2 παραπάνω έχει κανείς ότι

$$(A \cap B)^{\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ})} = \mathrm{conv}(A^{\circ} \cup B^{\circ}). \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) και την προηγούμενη Άσκηση έπεται λοιπόν ότι

$$g_{A\cap B}(x) = h_{(A\cap B)^{\circ}}(x) = \max\{h_{A^{\circ}}(x), h_{B^{\circ}}(x)\} = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, αφού $g_A = h_{A^{\circ}}$ και $g_B = h_{B^{\circ}}$. □

6. Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η h_C είναι γραμμική αν και μόνο αν το C είναι μονοσύνολο.

Λύση. Έστω πρώτα ότι $C = \{c\}$. Τότε $h_C(x) = \langle c, x\rangle$, που είναι γραμμική συνάρτηση του x εξ΄ ορισμού του εσωτερικού γινόμενου.

Αντίστροφα, έστω ότι η h_C είναι γραμμική συνάρτηση. Τότε

$$h_C(x) \geqslant \langle y, x\rangle \qquad \forall\, y \in C,$$

αλλά επίσης

$$-h_C(x) = h_C(-x) \geqslant \langle y, -x\rangle = -\langle y, x\rangle \qquad \forall\, y \in C,$$

όπου η ισότητα $-h_C(x) = h_C(-x)$ ισχύει λόγω της γραμμικότητας της h_C. Από αυτές τις δύο ανισότητες έπεται ότι

$$h_C(x) = \langle y, x\rangle$$

για κάθε $y \in C$ και $x \in \mathbb{R}^d$. Ειδικότερα, αν σταθεροποιήσει κανείς $y \in C$ (έχει υποτεθεί $C \neq \varnothing$), τότε για κάθε άλλο $y' \in C$ πρέπει

$$\langle y, x\rangle = h_C(x) = \langle y', x\rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

άρα και

$$\langle y - y', x\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Από αυτό έπεται ότι πρέπει $y - y' = 0$ (εφαρμόστε την παραπάνω ισότητα για $x = y - y'$). Επομένως $y = y'$ για κάθε άλλο y' στο C και άρα το C πρέπει να είναι μονοσύνολο. □

7. Έστω $C \subset \mathbb{R}^d$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές. Δείξτε ότι $\partial h_C(0) = C$, όπου, υπενθυμίζεται, το υποδιαφορικό μιας κυρτής $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ στο x είναι το σύνολο

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : f(y) \geqslant \langle v, y - x\rangle + f(x)\ \forall\, y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Λύση. Έστω πρώτα $x \in C$. Τότε

$$\langle x, y\rangle \leqslant \max_{z\in C}\langle z, y\rangle = h_C(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d\cdot$$

αφού $h_C(0) = \max_{y\in C}\langle y, 0\rangle = 0$, αυτό σημαίνει ότι

$$h_C(y) \geqslant \langle x, y - 0\rangle + h_C(0) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d,$$

και άρα $x \in \partial h_C(0)$. Επομένως $C \subseteq \partial_C(0)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω ότι υπάρχει $x \in \partial h_C(0) \setminus C$. Τότε επειδή το $\{x\}$ είναι συμπαγές και το C κλειστό, τα σύνολα αυτά διαχωρίζονται αυστηρά· υπάρχουν δηλαδή $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε $\langle u, x\rangle > c + \varepsilon$ και $\langle u, y\rangle < c - \varepsilon$ $\forall\, y \in C$. Όμως $x \in \partial h_C(0) \Rightarrow \langle y, x\rangle \leqslant h_C(y)$ $\forall\, y \in \mathbb{R}^d$, και ειδικότερα, $h_C(u) \geqslant \langle u, x\rangle$, για $y = u$. Τότε όμως

$$h_C(u) \geqslant \langle u, x\rangle > c + \varepsilon = 2\varepsilon + c - \varepsilon > 2\varepsilon + \max_{y\in C}\langle u, y\rangle = 2\varepsilon + h_C(u),$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο. Άρα δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο $x \in \partial h_C(0) \setminus C$. □

8. Έστω $K = [0, 1]$ και

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\delta(K_n, K) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, όπου $\delta(A, B)$ η απόσταση Hausdorff των A και B.

Λύση. Προφανώς $K_n \subseteq K$ και επομένως $K_n \subseteq K + tB_2(0, 1)$ για κάθε $t \geqslant 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα $n \in \mathbb{N}$, και έστω $x \in K = [0, 1]$. Τότε ή $x \in K_n$, οπότε και

$$x \in K_n + 2^{-n-1}B_2(0, 1),$$

ή $x \in K \setminus K_n$ και επομένως

$$x \in \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right) \qquad \text{για κάποιο } k \in \left\{1, \dots, 2^{n-1}\right\}\cdot$$

στην τελευταία περίπτωση, το x απέχει από τα άκρα του διαστήματος

$$\left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right)$$

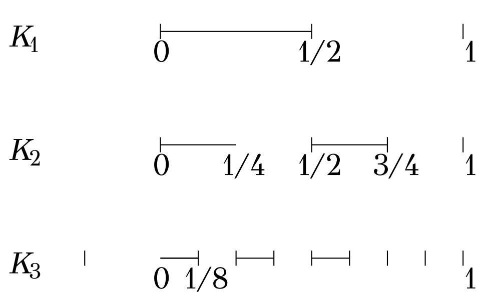
απόσταση το πολύ $\frac{1}{2}2^{-n} = 2^{-n-1}$, και άρα, πάλι,

$$x \in K_n + 2^{-n-1}B_2(0, 1).$$

Σε κάθε περίπτωση δηλαδή, $x \in K_n + 2^{-n-1}B_2(0, 1)$. Έπεται ότι $K \subseteq K_n + 2^{-n-1}B_2(0, 1)$.

Από τα παραπάνω

$$\delta(K_n, K) \leqslant 2^{-n-1} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0.$$



□

9. Για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$, η απόσταση Hausdorff ορίστηκε ως

$$\delta(A,B) = \inf\{t \in (0,\infty) : A \subseteq B + tB_2(0,1) \text{ και } B \subseteq A + tB_2(0,1)\},$$

όπου $B_2(0,1)$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^d$. Έστω τώρα

$$\mathrm{dist}(x,C) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in C\}$$

η συνήθης απόσταση του σημείου x από το σύνολο C, και έστω

$$D(A,B) := \sup_{x\in A} \mathrm{dist}(x,B),$$

και

$$\rho(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\},$$

για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\delta(A,B) = \rho(A,B)$, για μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

Λύση. Για δοθέντα μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$, αποδείχθηκε στο μάθημα (και είναι εύκολο να δει κανείς) ότι

$$\{t \in [0,\infty) : A \subseteq B + tB_2(0,1) \text{ και } B \subseteq A + tB_2(0,1)\} = [\delta(A,B), +\infty).$$

Έστω A, B μη κενά συμπαγή $A, B \subset \mathbb{R}^d$, και έστω πρώτα $t > \delta(A,B)$. Τότε

$$A \subseteq B + tB_2(0,1) \qquad \text{και} \qquad B \subseteq A + tB_2(0,1).$$

Επομένως, αν $x \in A$, τότε υπάρχουν $x' \in B$ και $u \in B_2(0,1)$ τέτοια ώστε $x = x' + tu$, οπότε $\|x - x'\|_2 = t\|u\|_2 \leqslant t$ και άρα

$$\mathrm{dist}(x,B) \leqslant \|x - x'\|_2 \leqslant t\cdot$$

και αν $y \in B$, τότε υπάρχουν $y' \in A$ και $v \in B_2(0,1)$ τέτοια ώστε $y = y' + tv$, οπότε $\|y - y'\|_2 = t\|v\|_2 \leqslant t$ και άρα

$$\mathrm{dist}(y,A) \leqslant \|y - y'\|_2 \leqslant t.$$

Επομένως,

$$\mathrm{dist}(x,B) \leqslant t \quad \forall\, x \in A \qquad \text{και} \qquad \mathrm{dist}(y,A) \leqslant t \quad \forall\, y \in B,$$

και άρα

$$D(A,B) \leqslant t \qquad \text{και} \qquad D(B,A) \leqslant t,$$

και συνεπώς και

$$\rho(A,B) \leqslant t.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $t > \delta(A,B)$, έπεται ότι

$$\delta(A,B) \geqslant \rho(A,B)$$

(διαφορετικά θα υπήρχε t γνήσια ανάμεσά τους, δηλαδή με $\delta(A,B) < t < \rho(A,B)$).

Αντίστροφα, έστω $t > \rho(A,B)$, οπότε $t > D(A,B)$ και $t > B(B,A)$. Τότε

$$t > \sup_{x\in A} \mathrm{dist}(x,B) \qquad \text{και} \qquad t > \sup_{y\in B} \mathrm{dist}(y,A).$$

Έστω $x \in A$· αφού $\operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|_2$, έπεται ότι υπάρχει $y \in B$ με

$$\|x - y\|_2 \leqslant t,$$

γιατί διαφορετικά θα είχε κανείς ότι $\|x - y\|_2 > t$ για κάθε $y \in B$ και άρα

$$\inf_{y \in B} \|x - y\|_2 \geqslant t.$$

Αν θέσει κανείς

$$u = \frac{1}{t}(x - y)$$

για αυτό το y, τότε $\|u\|_2 \leqslant 1$ και άρα $u \in B_2(0, 1)$, και $x = y + tu$· δηλαδή $x \in B + tB_2(0, 1)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $A \subseteq B + tB_2(0, 1)$. Όμοια δείχνει κανείς και ότι $B \subseteq A + tB_2(0, 1)$, και επομένως πρέπει

$$\delta(A, B) = \inf\{s \in (0, \infty) \colon A \subseteq B + sB_2(0, 1) \text{ και } B \subseteq A + sB_2(0, 1)\} \leqslant t.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $t > \rho(A, B)$, έπεται ότι $\delta(A, B) \leqslant \rho(A, B)$. Άρα τελικά $\delta(A, B) = \rho(A, B)$. □

10. Έστω $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $K_n \to \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ στην μετρική Hausdorff.

Λύση. Έστω $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει κανείς ότι $K \subseteq K_n$ και άρα

$$K \subseteq K_n + tB_2(0, 1) \qquad \forall\, t \in [0, \infty). \tag{5}$$

Από την άλλη, έστω ότι $\delta(K_n, K) \nrightarrow 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $K_n \nsubseteq K + \varepsilon B_2(0, 1)$ για άπειρους δείκτες $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\delta(K_n, K) > \varepsilon$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$, και επομένως μία από τις

$$K \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0, 1) \qquad \text{ή} \qquad K_n \subseteq K + \varepsilon B_2(0, 1)$$

δεν ισχύει για άπειρα n· αφού ο πρώτος εγκλεισμός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την (5), έπεται ότι δεν ισχύει ο δεύτερος για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, επειδή $K_1 \supseteq K_2 \subseteq \cdots$, έχει κανείς ότι

$$K_n \nsubseteq K + \varepsilon B_2(0, 1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\cdot$$

πράγματι αν $K_n \subseteq K + \varepsilon B_2(0, 1)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε θα έπρεπε $K_m \subseteq K + \varepsilon B_2(0, 1)$ $\forall\, m \in \{n, n+1, \ldots\}$, αφού $K_m \subseteq K_n$ $\forall\, m \in \{n, n+1, \ldots\}$. Έστω

$$C_n := K_n \setminus \operatorname{int}(K + \varepsilon B_2(0, 1)) = K_n \cap [\operatorname{int}(K + \varepsilon B_2(0, 1))]^{\mathrm{c}} \qquad n \in \mathbb{N}\cdot$$

τα σύνολα αυτά είναι συμπαγή, σαν κλειστά υποσύνολα των συμπαγών K_n, $n \in \mathbb{N}$, μη κενά, αφού

$$C_n := K_n \setminus \operatorname{int}(K + \varepsilon B_2(0, 1)) \supseteq K_n \setminus (K + \varepsilon B_2(0, 1)) \neq \varnothing,$$

και $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$, αφού $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$· έπεται ότι $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$.

Προφανώς $C \subseteq C_n \subseteq K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $C \subseteq K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Από την άλλη όμως πρέπει και $K \cap C = \varnothing$· πράγματι, αν υπήρχε $x \in K \cap C$, τότε θα έπρεπε $x \in K$ και $x \in C$, οπότε $x \in C_n = K_n \setminus \mathrm{int}(K + \varepsilon B_2(0,1))$, που σημαίνει $x \notin \mathrm{int}(K + \varepsilon B_2(0,1))$, και άρα $x \notin K$, αφού $K \subseteq \mathrm{int}(K + \varepsilon B_2(0,1))$, που φυσικά είναι άτοπο. Άρα $C \cap K = \varnothing$, το οποίο όμως τώρα αντίκειται στην $C \subseteq K$. Άρα υπάρχει αντίφαση και άρα πρέπει $C = \varnothing$ τελικά. Αυτό όμως σημαίνει ότι πρέπει $C_n = \varnothing$ από κάποιο n και μετά, δηλαδή πρέπει

$$K_n \subseteq \mathrm{int}(K + \varepsilon B_2(0,1)) \subseteq K + \varepsilon B_2(0,1)$$

από κάποιο n και μετά. □

11. Έστω K_n, $n \in \mathbb{N}$ και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και έστω ότι $K_n \to K$ στην μετρική Hausdorff. Δείξτε ότι τότε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m} \right)$.

Λύση. Έστω ότι $\delta(K_n, K) \to 0$ για μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Τότε, καταρχήν, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\delta(K_n, K) \leqslant 1$ για κάθε $n \geqslant N$. Έστω

$$r_1 = \max\{1, \delta(K_1, K), \ldots, \delta(K_{N-1}, K)\}\cdot$$

τότε

$$\delta(K_n, K) \leqslant r_1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

και επομένως

$$K_n \subseteq K + r_1 B_2(0,1) = K + B_2(0, r_1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Τέλος, αφού το K έχει υποτεθεί συμπαγές, υπάρχει και $r_2 > 0$ τέτοιο ώστε $K \subseteq B_2(0, r_2)$. Τότε

$$K_n \subseteq B_2(0, R) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

όπου $R = r_1 + r_2$.

Έστω τώρα $C_n := \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m}$, $n \in \mathbb{N}$. Τα C_n είναι κλειστά και φραγμένα, λόγω της (6), και άρα συμπαγή· επίσης αποτελούν φθίνουσα ακολουθία: $C_{n+1} \subseteq C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται από την προηγούμενη άσκηση ότι $\delta(C_n, C) \to 0$, όπου $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m} \right)$. Θα δειχθεί ότι και $\delta(K_n, C) \to 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\delta(C_n, C) < \varepsilon\ \forall\, n \geqslant n_1(\varepsilon)$· τότε

$$C_n \subseteq C + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall\, n \geqslant n_1(\varepsilon),$$

και φυσικά $C \subseteq C_n + \varepsilon B_2(0,1)\ \forall\, n \geqslant n_1(\varepsilon)$, αλλά ισχύει ήδη ο εγκλεισμός $C \subseteq C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $K_n \subseteq C_n$ για κάθε n και άρα

$$K_n \subseteq C + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall\, n \geqslant n_1(\varepsilon).$$

Αφού η ακολουθία K_n συγκλίνει, είναι βασική (Cauchy). Άρα υπάρχει $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε $\delta(K_n, K_m) \leqslant \varepsilon$ για $n, m \geqslant n_2(\varepsilon)$. Έπεται ότι

$$K_m \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \text{οποτεδήποτε } n, m \geqslant n_2(\varepsilon).$$

Ειδικότερα, αν $n \geqslant n_2(\varepsilon)$, τότε $K_m \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1)$ για κάθε $m \in \{n, n+1, \ldots\}$, και άρα

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1),$$

και επειδή το $K_n + \varepsilon B_2(0,1)$ είναι κλειστό, ως άθροισμα Minkowski συμπαγών, έπεται ότι τελικά

$$C_n = \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} K_m} \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1).$$

Έπεται τώρα ότι

$$C \subset C_n \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall n \geqslant n_2(\varepsilon).$$

Άρα

$$K_n \subseteq C + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \text{και} \qquad C \subseteq K_n + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall n \geqslant n(\varepsilon),$$

όπου $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$· δηλαδή, $\delta(K_n, C) \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n(\varepsilon)$. □

12. (α) Αν K_n, C_n, $n \in \mathbb{N}$, και K, C, μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, και $K_n \to K$ και $C_n \to C$ στην μετρική Hausdorff, τότε $K_n + C_n \to K + C$.
(β) Αν K_n, $n \in \mathbb{N}$, και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $K_n \to K$, και αν a_n, $n \in \mathbb{N}$, και a πραγματικοί αριθμοί και $a_n \to a$, τότε $a_n K_n \to aK$.
(Οι συγκλίσεις στην μετρική Hausdorff.)

Λύση. (α) Αυτό είναι συνέπεια του εξής ισχυρισμού.

Ισχυρισμός: Αν $K_1, K_2, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά και συμπαγή, τότε

$$\delta(K_1 + K_2, C_1 + C_2) \leqslant \delta(K_1, C_1) + \delta(K_2, C_2).$$

Πράγματι, τότε αν K_n, C_n, $n \in \mathbb{N}$, και K, C, μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, και $K_n \to K$ και $C_n \to C$, έπεται άμεσα ότι

$$\delta(K_n + C_n, K + C) \leqslant \delta(K_n, K) + \delta(C_n, C) \to 0.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $t > \delta(K_1, C_1)$ και $s > \delta(K_2, C_2)$· τότε

$$K_1 \subseteq C_1 + tB_2(0,1), \quad C_1 \subseteq K_1 + tB_2(0,1), \quad K_2 \subseteq C_2 + sB_2(0,1), \quad C_2 \subseteq K_2 + sB_2(0,1).$$

Αν $x_1 \in K_1$ και $x_2 \in K_2$, τότε υπάρχουν $y_1 \in C_1$ και $u_1 \in B_2(0,1)$ ώστε $x_1 = y_1 + tu_1$, από τον πρώτο από τους παραπάνω εγκλεισμούς, και $y_2 \in C_2$ και $u_2 \in B_2(0,1)$ ώστε $x_2 = y_2 + su_2$, από τον τρίτο εγκλεισμό· τότε όμως

$$x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + tu_1 + su_2 \in C_1 + C_2 + (t+s)B_2(0,1),$$

αφού $\|tu_1 + su_2\|_2 \leqslant t\|u_1\|_2 + s\|u_2\|_2 \leqslant t + s$, και άρα $tu_1 + su_2 \in (t+s)B_2(0,1)$. Αφού τα $x_1 \in K_1$ και $x_2 \in K_2$ ήταν αυθαίρετα, έπεται ότι

$$K_1 + K_2 \subseteq C_1 + C_2 + (t+s)B_2(0,1).$$

Όμοια από τους δεύτερο και τέταρτο εγκλεισμό έχει κανείς ότι αν $y_1 \in C_1$ και $y_2 \in C_2$, τότε υπάρχουν $x_1 \in K_1$ και $v_1 \in B_2(0,1)$ ώστε $y_1 = x_1 + tv_1$, και $x_2 \in K_2$ και $v_2 \in B_2(0,1)$ ώστε $y_2 = x_2 + sv_2$, οπότε

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + tv_1 + sv_2 \in K_1 + K_2 + (t+s)B_2(0,1),$$

από όπου έπεται και ο εγκλεισμός

$$C_1 + C_2 \subseteq K_1 + K_2 + (t+s)B_2(0,1).$$

Έπεται τώρα ότι

$$\delta(K_1 + K_2, C_1 + C_2) \leqslant t + s.$$

Αφού αυτό ισχύει για αυθαίρετα $t > \delta(K_1, C_1)$ και $s > \delta(K_2, C_2)$, έπεται ότι

$$\delta(K_1 + K_2, C_1 + C_2) \leqslant \delta(K_1, C_1) + \delta(K_2, C_2).$$

Πράγματι, αρκεί κανείς να πάρει δύο ακολουθίες $t_n \downarrow \delta(K_1, C_1)$ και $s_n \downarrow \delta(K_2, C_2)$· τότε

$$\delta(K_1 + K_2, C_1 + C_2) \leqslant t_n + s_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

οπότε

$$\delta(K_1 + K_2, C_1 + C_2) \leqslant \lim_{n\to\infty}(t_n + s_n) = \delta(K_1, C_1) + \delta(K_2, C_2).$$

(β) *Ισχυρισμός* 1: Αν $K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά συμπαγή, τότε $\delta(\lambda K, \lambda C) = |\lambda|\delta(K, C)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Έστω $t = \delta(K, C)$· τότε

$$K \subseteq C + tB_2(0,1) \qquad \text{και} \qquad C \subseteq K + tB_2(0,1).$$

Άρα, από τον πρώτο εγκλεισμό, αν $x \in K$, τότε υπάρχουν $y \in C$ και $u \in B_2(0,1)$ τέτοια ώστε $x = y + tu$, και επομένως

$$\lambda x = \lambda y + \lambda t u \in \lambda C + |\lambda| t B_2(0,1),$$

αφού $\|\lambda t u\|_2 = |\lambda||t|\|u\|_2 \leqslant t|\lambda|$. Αφού $x \in K$ ήταν αυθαίρετο, αυτό αποδεικνύει ότι

$$\lambda K \subseteq \lambda C + t|\lambda| B_2(0,1).$$

Όμοια ο εγκλεισμός $C \subseteq K + tB_2(0,1)$ δίνει ότι

$$\lambda C \subseteq \lambda K + t|\lambda| B_2(0,1).$$

Έπεται τώρα ότι

$$\delta(\lambda K, \lambda C) \leqslant |\lambda| t = |\lambda|\delta(K, C).$$

Όμως ομοίως, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα με τα συμπαγή μη κενά λK και λC στην θέση των K και C, και με $1/\lambda$ στην θέση του λ, παίρνει κανείς και την ανισότητα

$$\delta(K, C) = \delta(\lambda^{-1}(\lambda K), \lambda^{-1}(\lambda C)) \leqslant |\lambda|^{-1}\delta(\lambda K, \lambda C),$$

δηλαδή την ανισότητα

$$|\lambda|\delta(K, C) \leqslant \delta(\lambda K, \lambda C).$$

Εδώ φυσικά υποτέθηκε ότι $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda = 0$, η πρώτη ανισότητα ήδη δείχνει το ζητούμενο αφού δείχνει ότι

$$0 \leqslant \delta(\lambda K, \lambda C) \leqslant 0 \cdot \delta(K, C). \qquad \square$$

Ισχυρισμός 2: Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό συμπαγές, και $a_n, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, και αν $a_n \to a$, τότε $\delta(a_n K, aK) \to 0$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχει $R \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $K \subseteq B_2(0,R)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \varepsilon/R \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon)$. Τότε, αν $x \in K$, έχει κανείς ότι

$$\|a_n x - ax\|_2 = |a_n - a|\|x\|_2 \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

από όπου έπεται ότι $a_n x \in B_2(ax, \varepsilon)$, για $n \geqslant n(\varepsilon)$. Αφού αυτό ισχύει για αυθαίρετο $x \in K$, έπεται τώρα ότι

$$a_n K \subseteq aK + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Αλλά από την (7) έχει κανείς και ότι $ax \in B_2(a_n x, \varepsilon) \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon)$, για αυθαίρετο $x \in K$, απ΄ όπου έπεται ότι

$$aK \subseteq a_n K + \varepsilon B_2(0,1) \qquad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Άρα τελικά $\delta(a_n K, aK) \leqslant \varepsilon$ για $n \geqslant n(\varepsilon)$. □

Έστω τώρα K_n, $n \in \mathbb{N}$, και K μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $K_n \to K$, και a_n, $n \in \mathbb{N}$, και a πραγματικοί αριθμοί με $a_n \to a$. Τότε

$$\delta(a_n K_n, aK) \leqslant \delta(a_n K_n, a_n K) + \delta(a_n K, aK) = |a_n|\delta(K_n, K) + \delta(a_n K, aK) \to 0,$$

από την τριγωνική ανισότητα, τους Ισχυρισμούς 1 και 2, και τις συγκλίσεις $a_n \to a$ και $\delta(K_n, K) \to 0$. □