

Κυρτή Ανάλυση
Πέμπτη 18 Σεπτεμβρίου 2025

1. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) κυρτό και κλειστό σύνολο. Έστω επίσης $x_n \in K$, $n = 1, 2, \dots$ και $\lambda_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Αποδείξτε ότι ο άπειρος κυρτός συνδυασμός $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ ανήκει στο K .

(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό κυρτό σύνολο και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in K$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

2. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό ανοιχτό κυρτό σύνολο και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο K . Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x \in K$ και κάθε $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i u_j \geq 0.$$

(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό κυρτό σύνολο. Έστω επίσης $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in \mathbb{R}$ το σύνολο στάθμης $F_r = \{x \in K : f(x) \leq r\}$ είναι κυρτό (πιθανώς κενό). Αντίστροφα, αν όλα τα σύνολα F_r , $r \in \mathbb{R}$ είναι κυρτά, έπεται ότι η f είναι κυρτή;

3. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό σύνολο. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\text{conv}(A)$ είναι επίσης ανοιχτό.

(β)(i) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_m$ και C κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ το σύνολο $B_i = \{u \in \mathbb{R}^d : A_i \cap (C + u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό.

(ii) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i_1, i_2, \dots, i_{d+1} \in \{1, 2, \dots, m\}$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^d$ ώστε το σύνολο $C + u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{d+1}}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^d$ ώστε το σύνολο $C + u$ να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_m$.

4. (1.5+1.5 μον.) (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα K του $\mathbb{R}^d$ των οποίων το συμπλήρωμα είναι επίσης κυρτό σύνολο.

(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο και $S \subseteq K$ τέτοιο ώστε $\text{conv}(S) = K$. Αποδείξτε ότι $\text{ext}(K) \subseteq S$.

Καλή Επιτυχία!