Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 1ο Τεστ
13 Μαρτίου 2021

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $a_{n+1} - a_n \to 0$ τότε η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και έχει υπακολουθία (a_{k_n}) τέτοια ώστε $a_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$ τότε $a_n \to x$.

(γ) Αν η (a_n) είναι φραγμένη και (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n) τότε $\limsup_n a_{k_n} \leqslant \limsup_n a_n$.

(δ) Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n \to +\infty$.

2. (**4 μον.**) **(α)** Έστω (y_n) ακολουθία **θετικών** πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $y_n \to 0$. Αποδείξτε ότι η (y_n) έχει **γνησίως φθίνουσα** υπακολουθία (η οποία επίσης συγκλίνει στο 0).

(β) Έστω (x_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{x_n} < 1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

3. (**4 μον.**) **(α)** Προσδιορίστε το σύνολο των οριακών σημείων κάθε μίας από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{3^{(-1)^n n} + 2^n} \quad , \quad \beta_n = \frac{(1+\cos(n\pi))\ln(3n) + \ln n}{\ln(2n)}.$$

(β) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες **θετικών** πραγματικών αριθμών και έστω ότι $a_n \to a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot \limsup_n b_n.$$