Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 3ο Τεστ
24 Απριλίου 2021

1. (**1+3 μον.**) **(α)** Έστω I διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση τότε η f είναι Lipschitz συνεχής.

Στη συνέχεια εξετάστε αν η $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $f, g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = x \sin x.$$

Να διατυπώσετε σαφώς τα κριτήρια (από τη θεωρία ή τις βασικές ασκήσεις που έγιναν στο μάθημα) τα οποία χρησιμοποιείτε.

2. (**2+2 μον.**) **(α)** Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $a \leq \gamma < \delta \leq b$ τότε $\int_\gamma^\delta g(x)\, dx = 0$. Αποδείξτε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b g(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε $L(g, P) > 0$.]

3. (**1+1+2 μον.**) **(α)** Σωστό ή λάθος; Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων στα οποία είναι ασυνεχής είναι πεπερασμένο.

(β) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι: αν οι f, g είναι επιπλέον φραγμένες, τότε η $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ είναι επίσης Lipschitz συνεχής.

Ισχύει το ίδιο αν δεν υποθέσουμε ότι οι f και g είναι φραγμένες;

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ **και ότι** $f(0) = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.