Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 4ο Τεστ

22 Μαΐου 2021

1. (2+2 μον.) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με

$$\int_a^b f(x)dx = 3.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $t_1 < t_2$ στο (a,b) τέτοια ώστε

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 1.$$

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt.$$

2. (2+2 μον.) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(t)\sin t\, dt\right)^2 + \left(\int_a^b f(t)\cos t\, dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b |f(t)|^2\, dt.$$

(β) Έστω $b > a > 0$. Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

3. (2+2 μον.) (α) Έστω $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής και φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

συγκλίνει.

(β) Έστω $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $g(n) > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty g(x)dx = +\infty.$$