Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 4ο Τεστ
23 Μαΐου 2021

1. (**2+2 μον.**) **(α)** Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (f(t))^2 dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Ποιες είναι αυτές;
(β) Έστω $f : [0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο f' και $f(0) = 0$. Αποδείξτε, ότι για κάθε $x > 0$,

$$|f(x)|^2 \leqslant x \int_0^x |f'(t)|^2 dt.$$

2. (**2+2 μον.**) **(α)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$y_n = \int_1^n \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $m > n$ ισχύει $|y_m - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ και ότι η (y_n) συγκλίνει.
(β) Έστω $x > 1$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $s_x \in (1,x)$ ώστε

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{s_x}(x-1).$$

Δείξτε ότι αν $1 < x < y$ τότε $s_x < s_y$.

3. (**2+2 μον.**) **(α)** Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το $\int_0^\infty f(t)dt$ να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt = 0.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} (xf(x)) = 0.$$

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \cdot \ln 2.$$

[*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι $\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx = \ln 2$ για κάθε $a > 0$.]