Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 5ο Τεστ

5 Ιουνίου 2021

1. (**3+1 μον.**) **(α)** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx, \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$$

(β) Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\int e^x \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2+1}e^x(\cos(nx) + n\sin(nx)).$$

2. (**2+1+1 μον.**) **(α)** Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{12}}{6!} + \cdots$$

και τον τύπο της συνάρτησης που ορίζεται από αυτή τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-R, R)$.
(β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x\sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις παραγώγους $g^{(n)}(0)$ για κάθε $n \geqslant 1$.
(γ) Με τη βοήθεια πολυωνύμων Taylor υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3) - e^{x^6}}{x^6}.$$

3. (**2+2 μον.**) **(α)** Έστω $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία αναπαρίσταται ως δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

στο $(-R, R)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) στο $(-R, R)$ με $y_n \neq 0$ και $y_n \to 0$ τέτοια ώστε $f(y_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $a_0 = 0$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $f(x) = xg(x)$, όπου η $g : (-R, R) \to \mathbb{R}$ αναπαρίσταται κι αυτή από δυναμοσειρά. Συμπεράνατε ότι $a_k = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$.
(β) Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Υπολογίστε το

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x\,dx.$$