Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Επαναληπτικές Ασκήσεις - Μέρος Α′

Μάιος-Ιούνιος 2021

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $a_{n+1} - a_n \to 0$ τότε η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ψευδής. Ένα παράδειγμα δίνει η

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0,$$

όμως

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

άρα $a_n \to +\infty$.

Άλλο παράδειγμα δίνει η $a_n = \ln n$. Έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to \ln 1 = 0,$$

όμως $a_n = \ln n \to +\infty$.

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και έχει υπακολουθία (a_{k_n}) τέτοια ώστε $a_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$ τότε $a_n \to x$.

Αληθής. Αρχικά παρατηρούμε ότι η (a_{k_n}) είναι επίσης αύξουσα. Για κάθε n έχουμε $k_n < k_{n+1}$, άρα $a_{k_n} \leqslant a_{k_{n+1}}$ αφού η (a_n) είναι αύξουσα.

Αφού $a_{k_n} \to x$ και η (a_{k_n}) είναι αύξουσα, έχουμε $a_{k_n} \leqslant x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $k_n \geqslant n$, και αφού η (a_n) είναι αύξουσα παίρνουμε $a_n \leqslant a_{k_n} \leqslant x$. Άρα η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Αφού είναι και αύξουσα, συγκλίνει σε κάποιον y. Τότε όμως $a_{k_n} \to y$ και αφού $a_{k_n} \to x$ έχουμε $y = x$. Δηλαδή, $a_n \to x$.

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(γ) Αν η (a_n) είναι φραγμένη και (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n) τότε $\limsup_n a_{k_n} \leqslant \limsup_n a_n$.

Αληθής. Θετουμε $x = \limsup_n a_{k_n}$. Υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ της (a_{k_n}) τέτοια ώστε

$$a_{k_{\lambda_n}} \to x.$$

Όμως η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι και υπακολουθία της (a_n).

Αφού ο x είναι υπακολουθιακό όριο της (a_n) και ο $\limsup_n a_n$ είναι το μέγιστο υπακολουθιακό όριο της (a_n), έπεται ότι

$$\limsup_n a_{k_n} = x \leqslant \limsup_n a_n.$$

Άσκηση T-1

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(δ) Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n \to +\infty$.

Ψευδής. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν (και μάλιστα άπειροι) όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M. Πράγματι, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_0 > M$, και τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$ ισχύει $a_{2k} = k \geqslant k_0 > M$.

Όμως, $a_n \not\to +\infty$: αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της (a_n) είναι ίσοι με 1.

Άσκηση Τ-2

(α) Έστω (y_n) ακολουθία **θετικών** πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $y_n \to 0$. Αποδείξτε ότι η (y_n) έχει **γνησίως φθίνουσα** υπακολουθία (η οποία επίσης συγκλίνει στο 0).

Ορίζουμε τους όρους της (y_{k_n}) επαγωγικά. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί φυσικούς $k_1 < \cdots < k_m$ που ικανοποιούν τα εξής:

$$0 < y_{k_m} < y_{k_{m-1}} < \cdots < y_{k_1} \ \text{ και } \ 0 < y_{k_m} < \frac{1}{m}.$$

Θέτουμε $\varepsilon_{m+1} = \min\left\{y_1, \ldots, y_{k_m}, \frac{1}{m+1}\right\} > 0$. Αφού $y_n \to 0$, υπάρχει $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $y_{k_{m+1}} < \varepsilon_{m+1}$. Από τον ορισμό του ε_{m+1} έπεται ότι:

$$(\alpha)\ k_m < k_{m+1}, \qquad (\beta)\ y_{k_{m+1}} < y_{k_m}, \qquad (\gamma)\ y_{k_{m+1}} < \frac{1}{m+1}.$$

Έτσι ορίζεται επαγωγικά μια γνησίως φθίνουσα υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) η οποία συγκλίνει στο 0.

Άσκηση Τ-2

(β) Έστω (x_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\limsup\limits_n \sqrt[n]{x_n} < 1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

Θέτουμε $x = \limsup\limits_n \sqrt[n]{x_n}$. Αφού $x < 1$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x + \varepsilon < 1$.

Από τον χαρακτηρισμό του lim sup υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{x_n} < x + \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 < x_n < (x + \varepsilon)^n.$$

Αφού $0 < x + \varepsilon < 1$, έχουμε $(x + \varepsilon)^n \to 0$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $x_n \to 0$.

Άσκηση Τ-3

(α) Προσδιορίστε το σύνολο των οριακών σημείων κάθε μίας από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{3^{(-1)^n n} + 2^n} \quad , \quad \beta_n = \frac{(1+\cos(n\pi))\ln(3n) + \ln n}{\ln(2n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha_{2k} = \sqrt[2k]{3^{2k} + 2^{2k}} \to 3$$

διότι η ακολουθία $\sqrt[n]{3^n + 2^n} \to \max\{3,2\} = 3$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό Ι). Επίσης,

$$\alpha_{2k-1} = \sqrt[2k-1]{(1/3)^{2k-1} + 2^{2k-1}} \to 2$$

διότι ομοίως $\sqrt[n]{(1/3)^n + 2^n} \to \max\{1/3, 2\} = 2$. Έπεται ότι $\limsup \alpha_n = 3$ και $\liminf \alpha_n = 2$.

Παρατηρούμε ότι

$$\beta_{2k} = \frac{(1+\cos(2k\pi))\ln(6k) + \ln(2k)}{\ln(4k)} = \frac{2\ln k + 2\ln 6 + \ln 2 + \ln k}{\ln k + \ln 4} \to 3$$

και

$$\beta_{2k-1} = \frac{\ln(2k-1)}{\ln(2(2k-1))} = \frac{\ln(2k-1)}{\ln 2 + \ln(2k-1)} \to 1$$

διότι $1 + \cos(2k\pi - \pi) = 1 + (-1) = 0$ για κάθε k. Έπεται ότι $\limsup \beta_n = 3$ και $\liminf \beta_n = 1$.

Άσκηση Τ-3

(β) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες **θετικών** πραγματικών αριθμών και έστω ότι $a_n \to a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot \limsup_n b_n.$$

Έστω $x = \limsup_n b_n$ και $y = \limsup_n (a_n \cdot b_n)$.

Υπάρχει υπακολουθία $b_{k_n} \to x$. Αφού $a_n \to a$ έχουμε και $a_{k_n} \to a$. Άρα, $a_{k_n} b_{k_n} \to ax$. Αφού ο ax είναι υπακολουθιακό όριο της $(a_n b_n)$ έπεται ότι

$$ax \leqslant y.$$

Ομοίως, υπάρχει υπακολουθία $a_{\lambda_n} b_{\lambda_n} \to y$. Αφού $a_n \to a$ έχουμε και $a_{\lambda_n} \to a$, και αφού $a > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{a_{\lambda_n}} \to \frac{1}{a}$. Άρα,

$$b_{\lambda_n} = \frac{1}{a_{\lambda_n}} \cdot (a_{\lambda_n} b_{\lambda_n}) \to \frac{1}{a} \cdot y.$$

Αφού ο $\frac{1}{a} \cdot y$ είναι υπακολουθιακό όριο της (b_n) έπεται ότι $\frac{1}{a} \cdot y \leqslant x$, δηλαδή

$$y \leqslant ax.$$

Τελικά, $ax = y$.

Άσκηση Ε-1

Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία δεν συγκλίνει, αλλά ικανοποιεί το εξής: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0.$$

Η ακολουθία $a_n = \ln n$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_{n+k} - a_n = \ln(n+k) - \ln n = \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \to \ln 1 = 0$$

όταν $n \to \infty$.

Όμως, $a_n = \ln n \to +\infty$, δηλαδή η (a_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Άσκηση Ε-2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει.

Θεωρούμε τυχούσα γνησίως αύξουσα ακολουθία (y_n) στο $\mathbb{R}$.

Η ακολουθία $(f(y_n))$ είναι φραγμένη διότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση. Από το θεώρημα Bolzano-Weerstrass υπάρχει υπακολουθία $f(y_{k_n}) \to \ell \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $x_n = y_{k_n}$. Η (x_n) είναι υπακολουθία της γνησίως αύξουσας ακολουθίας (y_n), άρα είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία.

Τέλος, $f(x_n) = f(y_{k_n}) \to \ell$.

Άσκηση Ε-3

Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.

Θέτουμε $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $1 - \varepsilon < x \leqslant 1$. Αφού $1 \notin A$, έχουμε την ισχυρότερη ανισότητα $1 - \varepsilon < x < 1$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \cdots$ και $1 - \frac{1}{n} < a_{k_n} < 1$. Τότε, για την γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $a_{k_n} \to 1$.

Εφαρμόζοντας τον χαρακτηρισμό του supremum με $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε $a_{k_1} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < a_{k_1} < 1$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_m}$ και $1 - \frac{1}{j} < a_{k_j} < 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $s = \max\{1 - \frac{1}{m+1}, a_1, a_2, \ldots, a_{k_m}\}$. Αφού $s < 1$, μπορούμε να βρούμε $a_{k_{m+1}} \in A$ που ικανοποιεί την $s < a_{k_{m+1}} < 1$. Τότε, $k_{m+1} > k_m$, $a_{k_m} < a_{k_{m+1}}$ και $1 - \frac{1}{m+1} < a_{k_{m+1}} < 1$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση Ε-5

Να βρεθούν τα lim inf και lim sup των παρακάτω ακολουθιών:

$$\delta_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right], \zeta_n = \sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\delta_{3k} &= k - [k] = k - k = 0 \to 0,\\
\delta_{3k+1} &= k + \frac{1}{3} - \left[k + \frac{1}{3}\right] = k + \frac{1}{3} - k = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3},\\
\delta_{3k+2} &= k + \frac{2}{3} - \left[k + \frac{2}{3}\right] = k + \frac{2}{3} - k = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Άρα, τα οριακά σημεία της (δ_n) είναι τα $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Έπεται ότι

$$\liminf \delta_n = 0 \quad \text{και} \quad \limsup \delta_n = \frac{2}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι $\zeta_n = \sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin(\pi n) = 0$, οπότε

$$\zeta_n \to 0.$$

Άρα,

$$\liminf \zeta_n = 0 \quad \text{και} \quad \limsup \zeta_n = 0.$$

Άσκηση Ε-7

Έστω (b_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\liminf b_n = -5$ και $\limsup b_n = 10$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία

$$\gamma_n = \frac{b_n}{1 + \ln n}.$$

Από τον χαρακτηρισμό του lim inf, παίρνοντας τον $-6 < \liminf b_n$ βλέπουμε ότι όλοι τελικά οι $b_n > -6$. Ομοίως, από τον χαρακτηρισμό του lim sup, παίρνοντας τον $11 > \limsup b_n$ βλέπουμε ότι όλοι τελικά οι $b_n < 11$.

Δηλαδή, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$-6 < b_n < 11.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$-\frac{6}{1 + \ln n} \leqslant \gamma_n = \frac{b_n}{1 + \ln n} \leqslant \frac{11}{1 + \ln n}.$$

Αφού $\frac{1}{1+\ln n} \to 0$, από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\gamma_n \to 0$.

Άσκηση 13

Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \leqslant a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \leqslant a \leqslant a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(α) Η (a_{2n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον a_1 ενώ η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_2. Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα. Ειδικότερα,

$$a_2 \leqslant a_{2n} \leqslant a_{2n-1} \leqslant a_1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$. Αυτό είναι άμεσο από το γεγονός ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα (γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει).

Άσκηση 13

Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \leqslant a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \leqslant a \leqslant a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) $a = b$: αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι $a_{2n-1} - a_{2n} \to 0$. Αφού $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$, έχουμε

$$b - a = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0.$$

(δ) $a_n \to a = b$: στο (γ) είδαμε ότι

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b.$$

Από γνωστή άσκηση έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = b.$$

(ε) $a_{2n} \leqslant a \leqslant a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αφού η (a_{2n}) είναι αύξουσα, η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και ο a είναι το κοινό τους όριο. Γνωρίζουμε ότι

$$a = \sup\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Άσκηση 17

Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+a_n}.$$

Δείξτε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Δείχνουμε πρώτα ότι η (a_n) ορίζεται καλά και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, δείχνουμε ότι αν $a_n \to x$ τότε $x = \sqrt{3}$.

(i) Υποθέτουμε ότι $0 < a_1 < \sqrt{3}$. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(α) $a_2 > \sqrt{3}$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $a_{n+2} = \frac{3+2a_n}{2+a_n}$.

(γ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k-1} < \sqrt{3}$ και $a_{2k-1} < a_{2k+1}$.

(δ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k} > \sqrt{3}$ και $a_{2k+2} < a_{2k}$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 βλέπουμε ότι οι (a_{2k-1}) και (a_{2k}) συγκλίνουν. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση ανάμεσα στον a_{n+2} και τον a_n δείχνουμε ότι $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \sqrt{3}$. Από γνωστή άσκηση έπεται ότι $a_n \to \sqrt{3}$.

(ii) Εξετάζουμε με τον ίδιο τρόπο την περίπτωση $a_1 > \sqrt{3}$.

(iii) Τέλος, δείχνουμε ότι αν $a_1 = \sqrt{3}$ τότε έχουμε $a_n = \sqrt{3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 26

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Βρείτε μια ακολουθία (a_n) η οποία να έχει ακριβώς m διαφορετικές υπακολουθίες.

Αν $m = 1$, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $a_n = 1$. Παρατηρούμε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους της ίσους με 1, δηλαδή συμπίπτει με την (a_n).

Έστω $m > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται ως εξής: $a_n = 0$ αν $n < m$ και $a_n = 1$ αν $n \geqslant m$. Παρατηρούμε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι τελικά σταθερή και ίση με 1, μπορεί δε να έχει από κανέναν ως $m - 1$ πρώτους όρους ίσους με 0 (αυτό εξαρτάται από το πόσους από τους $m - 1$ πρώτους όρους της (a_n) έχει σαν όρους η υπακολουθία). Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών υπακολουθιών της (a_n) είναι ακριβώς m.