Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Επαναληπτικές Ασκήσεις - Μέρος Β΄

Μάιος-Ιούνιος 2021

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αληθής. Αφού $k^2 a_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|k^2 a_k| \leqslant 1$ για κάθε $k \geqslant k_0$, ή ισοδύναμα,

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{k^2} \text{ για κάθε } k \geqslant k_0.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει και έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

Ψευδής. Αν $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ τότε από το κριτήριο Leibniz η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

συγκλίνει (αφού η $1/\sqrt{k}$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0). Όμως η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

αποκλίνει (αρμονική σειρά).

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

Αληθής. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (s_n) με $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη. Η ακολουθία $b_k = \frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα, έχει θετικούς όρους και συγκλίνει στο 0. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κριτηρίου Dirichlet και συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

Άσκηση Τ-1

Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

Αληθής. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει, έχουμε $a_k^2 \to 0$ άρα $a_k \to 0$. Συνεπώς, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε $|a_k| \leqslant 1$.
Τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε

$$|a_k^3| = |a_k^2| \cdot |a_k| = a_k^2 \cdot |a_k| \leqslant a_k^2.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση Τ-2

(α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+2}\right)^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}}.$$

(α) Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\ln k \leqslant \sqrt{k}$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Άρα για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε

$$0 \leqslant \frac{\ln k}{k^2} \leqslant \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Αφού $3/2 > 1$ η σειρά $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει, και από το κρίτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ συγκλίνει, άρα και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ συγκλίνει.

(β) Για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε $0 \leqslant \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ συγκλίνει κι αυτή.

Άσκηση Τ-2

(α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+2}\right)^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}}.$$

(γ) Αν $a_k = \left(\frac{k^2+1}{k^3+2}\right)^2$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} \to 1 > 0$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+2}\right)^2$ συγκλίνει.

(δ) Γνωρίζουμε ότι $\sqrt[k]{k} - 1 \to 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 \leqslant \sqrt[k]{k} - 1 < e^{-1}$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Τότε,

$$(\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}} \leqslant e^{-\sqrt{k}}, \qquad k \geqslant k_0.$$

Όμως $e^x > x^4$ για μεγάλα x, άρα υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $e^{\sqrt{k}} > k^2$ για κάθε $k \geqslant k_1$. Έπεται ότι, για κάθε $k \geqslant \max\{k_0, k_1\}$ ισχύει

$$(\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}} \leqslant e^{-\sqrt{k}} < \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης βλέπουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

Άσκηση Τ-2

(β) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, έχουμε $b_k \to 0$. Ειδικότερα, η (b_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|b_k| \leqslant M$ για κάθε $k \geqslant 1$.
Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k b_k| = |a_k| \cdot |b_k| \leqslant M\,|a_k|,$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει (από την υπόθεση), το κριτήριο σύγκρισης μας δίνει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k|$ συγκλίνει. Άρα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

Άσκηση Τ-3

(α) Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$

Έχουμε $a_k = 3^k$ άρα $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{3^k} = 3 \to 3$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \frac{1}{3}$.

Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x| < \frac{1}{3}$ και αποκλίνει αν $|x| > \frac{1}{3}$. Αν $x = \frac{1}{3}$ τότε έχουμε την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει, ενώ αν $x = -\frac{1}{3}$ τότε έχουμε την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz.

Τελικά, το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι το $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Άσκηση Τ-3

(β) Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ ακολουθια πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=1$, άρα $R\geqslant 1$. Ας υποθέσουμε ότι $R>1$. Τότε, αφού για κάθε $|x|<R$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως, παίρνοντας $x=1$ βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αυτό είναι άτοπο, άρα $R=1$.

Άσκηση Τ-3

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $a_n = f(1/n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι:

(1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f(0) = 0$.

(2) Αν υπάρχει η $f'(0)$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f'(0) = 0$. [*Υπόδειξη:* παρατηρήστε ότι $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} na_n$.]

(1) Παρατηρούμε ότι, αφού η f είναι συνεχής στο 0, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

και $a_n \to 0$ αφού η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Άρα, $f(0) = 0$.

(2) Παρατηρούμε ότι αφού υπάρχει η $f'(0)$ θα πρέπει να είναι ίση με

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} nf(1/n) = \lim_{n\to\infty} (na_n).$$

Χρησιμοποιήσαμε την αρχή της μεταφοράς και το γεγονός ότι $f(0) = 0$ από το (α). Άρα $na_n \to \ell = f'(0)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα αποκλείσουμε τις $\ell > 0$ και $\ell < 0$, οπότε $f'(0) = \ell = 0$.

Άσκηση Τ-3

(γ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $a_n = f(1/n)$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι:

(1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f(0) = 0$.

(2) Αν υπάρχει η $f'(0)$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $f'(0) = 0$. [*Υπόδειξη:* παρατηρήστε ότι $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} na_n$.]

Έστω ότι $na_n \to \ell > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $na_n > \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Όμως τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $a_n \geqslant \frac{\ell}{2n}$ και η σειρά $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ell}{2n}$ αποκλίνει στο $+\infty$, άρα η $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, άτοπο.

Έστω ότι $na_n \to \ell < 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $na_n < \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Όμως τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $a_n \leqslant \frac{\ell}{2n}$ και αφού $\ell < 0$ η σειρά $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ell}{2n}$ αποκλίνει στο $-\infty$, άρα η $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $-\infty$, άτοπο.

Συνεπώς, $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} na_n = \ell = 0$.

Άσκηση Ε-5

Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $0 < b < 1$ ώστε: $|a_{n+1} - a_n| \leqslant b^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $0 < b < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b^k$ συγκλίνει, συνεπώς η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^{n} b^k$ των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, άρα είναι βασική. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} b^k = s_n - s_m < \varepsilon.$$

Τότε, από την υπόθεση, για κάθε $n > m \geqslant n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} b^k < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (a_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει.

Άσκηση Ε-21

Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, άρα είναι βασική. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} = s_n - s_m < \varepsilon.$$

Τότε, από την υπόθεση, για κάθε $n > m \geqslant n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (a_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει.

Άσκηση Ε-56

Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ φραγμένη ακολουθια. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Η δυναμοσειρά αποκλίνει για $x = 1$, άρα $R \leqslant 1$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο της ρίζας βλέπουμε ότι

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}\,|x| \leqslant |x|$$

διότι η (a_k) είναι φραγμένη, άρα $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leqslant 1$. Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με $|x| < 1$, το οποίο αποδεικνύει ότι $R \geqslant 1$.
Συνδυάζοντας τις $R \leqslant 1$ και $R \geqslant 1$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση Ε-20

Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $0 < a_k \leqslant a_{2k} + a_{2k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Από την υπόθεση έχουμε $a_1 \leqslant a_2 + a_3$. Επίσης, $a_2 \leqslant a_4 + a_5$ και $a_3 \leqslant a_6 + a_7$, άρα

$$a_1 \leqslant a_2 + a_3 \leqslant a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

Με τον ίδιο τρόπο (εφαρμόζοοντας την υπόθεση για τους a_4, a_5, a_6 και a_7) βλέπουμε ότι

$$a_1 \leqslant a_8 + a_9 + \cdots + a_{15},$$

και γενικά, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει (το δείχνουμε με επαγωγή) $a_1 \leqslant \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k$. Προσθέτοντας έχουμε

$$Na_1 \leqslant \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k = \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} a_k = s_{2^{N+1}-1}.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$, αφού $a_1 > 0$, παίρνουμε $s_{2^{N+1}-1} \to +\infty$. Η (s_n) είναι γνησίως αύξουσα, διότι $a_k > 0$ για κάθε k, άρα $s_n \to +\infty$. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Άσκηση 38

Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμων. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{k/(k+1)}$ συγκλίνει.

Γράφουμε $a_k^{\frac{k}{k+1}} = \frac{a_k}{a_k^{\frac{1}{k+1}}}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $a_k > 1/2^{k+1}$ τότε $a_k^{\frac{1}{k+1}} > 1/2$. Συνεπώς,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant 2a_k.$$

(β) Αν $a_k \leqslant 1/2^{k+1}$ τότε

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant 2a_k + \frac{1}{2^k}.$$

Όμως, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2a_k + 2^{-k})$ συγκλίνει. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

Άσκηση Ε-24

Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Μιμούμαστε την απόδειξη του κριτηρίου Dirichlet, δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy και άθροιση κατά μέρη. Η $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n| \leqslant M$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, βρίσκουμε $N_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geqslant N_1$,

$$\sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Έπεται ότι

$$|b_m - b_n| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

για κάθε $n > m \geqslant N_1$, άρα η (b_n) είναι βασική, άρα $b_n \to b \in \mathbb{R}$. Μπορούμε τότε να βρούμε N_2 τέτοιο ώστε $|b_k - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$ για κάθε $k \geqslant N_2$. Τέλος, αφού η (s_n) συγκλίνει είναι βασική, άρα μπορούμε να βρούμε N_3 τέτοιο ώστε $|b||s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $n, m \geqslant N_3$.

Άσκηση Ε-24

Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Θέτουμε $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Άν $N \leqslant m < n$, τότε

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n(b_n - b) - s_{m-1}(b_m - b) + b(s_n - s_m)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n - b| + |s_{m-1}||b_m - b| + |b||s_n - s_m| \\
&\leqslant M \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + M|b_n - b| + M|b_m - b| + |b||s_n - s_m| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Άσκηση Ε-25

Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k a_{s_k} < +\infty$.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $a_k > 0$ και $a_k \to 0$, μπορούμε να βρούμε (επαγωγικά) φυσικούς $s_1 < s_2 < \cdots$ ώστε $a_{s_k} < \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{k^2}$.
Η (a_{s_k}) είναι υπακολουθία της (a_k) και για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$0 < 3^k a_{s_k} < \frac{1}{k^2}.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k a_{s_k}$ συγκλίνει.

Άσκηση Ε-19

Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών με $\lim\limits_{k\to\infty} a_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει.

Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε $1 < a < s := \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας με $\varepsilon = s - a > 0$, βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $a_k > a$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Συνεπώς, για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{k^{a_k}} \leqslant \frac{1}{k^a}.$$

Ο a είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το k) και μεγαλύτερος από 1, άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει.

Άσκηση 34

Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\}$ συγκλίνει. Αφού η (a_k) φθίνει προς το 0, το ίδιο ισχύει για την $\left(\min\{a_k, \frac{1}{k}\}\right)$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \min\left\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\}$$

συγκλίνει. Ειδικότερα, $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} \to 0$, άρα τελικά έχουμε $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} = 2^k a_{2^k}$. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας ξανά το κριτήριο συμπύκνωσης, αυτή τη φορά για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

Άσκηση 36

Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. (α) Δείξτε ότι: για κάθε $1 \leqslant m < n$ ισχύει $\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geqslant 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $r_n \to 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι η (r_n) είναι φθίνουσα. Για κάθε $1 \leqslant m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} &\geqslant \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \geqslant \frac{a_m + \cdots + a_n}{r_m} \\ &= \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} \geqslant 1 - \frac{r_n}{r_m}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$1 - \frac{r_n}{r_m} \leqslant \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} < \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιώντας $m \geqslant n_0$ και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 36

Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geqslant \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leqslant 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leqslant 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.