Απειροστικός Λογισμός II

Επαναληπτικές Ασκήσεις - Μέρος Δ΄

Μάιος-Ιούνιος 2021

Άσκηση Τ-1

(α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x)dx = 3$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $t_1 < t_2$ στο (a, b) τέτοια ώστε $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 1$.

Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f στο $[a, b]$. Αφού η F είναι συνεχής και $F(a) = 0$, $F(b) = 3$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $t_1 \in (a, b)$ ώστε

$$F(t_1) = \int_a^{t_1} f(t)dt = 1.$$

Τώρα θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_{t_1}^x f(t)dt$ της f στο $[t_1, b]$. Αφού η G είναι συνεχής και $G(t_1) = 0$ και

$$G(b) = \int_{t_1}^{b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^{t_1} f(t)dt = 2,$$

από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $t_2 \in (t_1, b)$ ώστε

$$G(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = 1.$$

Άσκηση Τ-1

(β) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt.$$

Θέτουμε $y = x^2$, οπότε ζητάμε το

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{G(y)}{y^2}$$

όπου

$$G(y) = \int_0^{y} e^t \sin t\, dt.$$

Έχουμε

$$\frac{G'(y)}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \to \frac{1}{2}$$

όταν $y \to 0^+$, διότι $\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$. Από τον κανόνα l' Hospital το όριο

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{G(y)}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση T-2

(α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(t)\sin t\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b f(t)\cos t\,dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b |f(t)|^2\,dt.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b f(t)\sin t\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b f(t)\cos t\,dt\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)\left[\int_a^b \sin^2 t\,dt + \int_a^b \cos^2 t\,dt\right] \\
&= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left[\int_a^b (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt\right] \\
&= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left[\int_a^b \mathbf{1}\,dt\right] \\
&= (b-a)\int_a^b |f(t)|^2\,dt.
\end{aligned}$$

Άσκηση T-2

(β) Έστω $b > a > 0$. Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx &= \int_a^b \left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)' \frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{n}\frac{\cos(nx)}{x}\Big|_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nx)\frac{1}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1}{n}\frac{\cos(nx)}{x}\Big|_a^b\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{\cos(nb)}{b} - \frac{\cos(na)}{a}\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \to 0$$

και

$$\frac{1}{n}\left|\int_a^b \cos(nx)\frac{1}{x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = 0.$$

Άσκηση Τ-3

(α) Έστω $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής και φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει.

Γράφουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \int_1^n f(x)dx \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x))dx \leqslant 0 \end{aligned}$$

διότι $f(n+1) \leqslant f(x)$ για κάθε $x \in [n, n+1]$ αφού η f είναι φθίνουσα. Συνεπώς, η (a_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

άρα

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(n) \geqslant 0,$$

άρα η (a_n) είναι κάτω φραγμένη από το 0, και αφού είναι φθίνουσα έπεται ότι συγκλίνει.

Άσκηση Τ-3

(β) Έστω $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $g(n) > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty g(x)dx = +\infty.$$

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της g έχουμε ότι υπάρχει $0 < \delta < 1/2$ τέτοιο ώστε αν $t, s \geqslant 0$ και $|t - s| \leqslant \delta$ τότε $|g(t) - g(s)| < \frac{1}{2}$. Αφού $g(n) > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [n - \delta, n + \delta]$ ισχύει

$$g(x) > g(n) - |g(x) - g(n)| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τα διαστήματα $[n - \delta, n + \delta]$ είναι ξένα ανά δύο, διότι $\delta < 1/2$. Συνεπώς, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\int_0^\infty g(x)dx \geqslant \int_0^{N+\delta} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{k-\delta}^{k+\delta} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}(2\delta) = N\delta.$$

Αφού $\lim\limits_{N\to\infty} N\delta = +\infty$ έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση Τ-1

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (f(t))^2 dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Ποιες είναι αυτές;

Για τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - (f(x))^2 = f(x)(1 - f(x))$ έχουμε

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt = 0$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Αφού $G'(x) = g(x)$, έπεται ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, δηλαδή για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $f(x) = 0$ ή $f(x) = 1$.
Όμως η f δεν μπορεί να παίρνει και τις δύο τιμές: είναι συνεχής και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα έπαιρνε π.χ. και την τιμή $1/2$. Άρα, είτε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ (δηλαδή $f \equiv 0$) ή $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [a, b]$ (δηλαδή $f \equiv 1$),

Άσκηση T-1

(β) Έστω $f : [0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο f' και $f(0) = 0$. Αποδείξτε, ότι για κάθε $x > 0$,

$$|f(x)|^2 \leqslant x \int_0^x |f'(t)|^2 dt.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= |f(x) - f(0)|^2 = \Big| \int_0^x f'(t)\, dt \Big|^2 \\ &\leqslant \left(\int_0^x \mathbf{1} \cdot |f'(t)|\, dt \right)^2 \leqslant \left(\int_0^x \mathbf{1}^2 dt \right) \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right) \\ &= x \int_0^x |f'(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(0) = 0$, το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Άσκηση Τ-2

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$y_n = \int_1^n \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $m > n$ ισχύει $|y_m - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ και ότι η (y_n) συγκλίνει.

Για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= \Big| \int_n^m \frac{cost}{t^2} dt \Big| \leqslant \int_n^m \frac{|\cos t|}{t^2} dt \\ &\leqslant \int_n^m \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}\Big|_n^m = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η (y_n) είναι βασική. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ και για κάθε $m > n \geqslant n_0$ έχουμε

$$|y_m - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Αφού η (y_n) είναι βασική, συγκλίνει.

Άσκηση Τ-2

(β) Έστω $x > 1$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $s_x \in (1, x)$ ώστε

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{s_x}(x-1).$$

Δείξτε ότι αν $1 < x < y$ τότε $s_x < s_y$.

Από την $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο: έχουμε $\ln x = \frac{1}{s_x}(x-1)$ αν και μόνο αν

$$s_x = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Για τη μονοτονία αρκεί να δείξουμε ότι η $g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Έχουμε

$$g'(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}\left(\ln x - \frac{x-1}{x}\right)$$

άρα το ζητούμενο έπεται από την $-\ln \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{x}$ ή ισοδύναμα την γνωστή ανισότητα $\ln y < y - 1$ (όπου $y = 1/x \in (0,1)$).

Άσκηση Τ-3

(α) Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το $\int_0^\infty f(t)dt$ να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^x f(t)dt=0$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(xf(x))=0$.

Θέτουμε

$$I=\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{y\to\infty}\int_0^y f(t)dt.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $y_0>0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y>y_0$, $\left|\int_0^y f(t)dt-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.
Τότε, για κάθε $x>2y_0$ έχουμε $x>y_0$ και $x/2>y_0$, άρα

$$\begin{aligned}\left|\int_{x/2}^x f(t)dt\right| &= \left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^{x/2} f(t)dt\right|\\ &\leqslant \left|\int_0^x f(t)dt-I\right|+\left|I-\int_0^{x/2} f(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^x f(t)dt=0$.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αν η f είναι φθίνουσα τότε

$$0\leqslant xf(x)=2\cdot\frac{x}{2}f(x)\leqslant 2\int_{x/2}^x f(t)dt\longrightarrow 0$$

όταν $x\to\infty$, από τον πρώτο ισχυρισμό.

Άσκηση Τ-3

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \cdot \ln 2.$$

[*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι $\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx = \ln 2$ για κάθε $a > 0$.]

Έστω $\delta > 0$. Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(0)| \leqslant \delta$ για κάθε $x \in [0, \varepsilon_0]$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, χρησιμοποιώντας και την

$$\int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \ln(4\varepsilon) - \ln(2\varepsilon) = \ln 2$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx - f(0) \cdot \ln 2 \Big| &= \Big| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx - f(0) \cdot \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx \Big| \\ &= \Big| \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} (f(x) - f(0)) \frac{1}{x} dx \Big| \leqslant \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} |f(x) - f(0)| \frac{1}{x} dx \leqslant \delta \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \delta(\ln 2). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ορίου έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση Ε-37

Έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\, dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$. Έχουμε $g(0) = 0$ και $g'(t) = |f'(t)|$ για κάθε $t \in [0, a]$. Επίσης,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt = g(x)$$

για κάθε $x \in [0, a]$, άρα

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \leqslant \int_0^a g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^a [g^2(t)]' dt = \frac{1}{2} g^2(a).$$

Τέλος,

$$\frac{1}{2} g^2(a) = \frac{1}{2} \left(\int_0^a g'(t)dt \right)^2 \leqslant \frac{a}{2} \int_0^x (g'(t))^2 dt = \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την $g'(t) = |f'(t)|$.